Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 28, N° 7, 1975

МАТЕМАТИКА
Топология

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МАЙКЛА О СЕЧЕНИЯХ

М. М. Чобан, В. М. Вылов

(Представлено академиком Б. Петканчиным 26. XI. 1974)

В работе [1] Е. Майкл формулирует следующую теорему (см. [1], теорема 3.1): Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:

а) X — коллективно нормально;

б) Для любого полунепрерывного снизу отображения (коротко — п. н. сн.) $\Phi: X \to \mathfrak{C}'(Y)$, где Y — банахово пространство, существует непрерывное сечение $f: X \to Y$.

Здесь $\mathfrak{C}'(Y) = \mathfrak{C}(Y) \cup \{Y\}$, где $\mathfrak{C}(Y)$ — семейство непустых, компактных выпуклых подмножеств Y.

В работе [2] С. Недев отмечает, что предложенное Майклом доказательство импликации а) $\to$ б) верно только если $\Phi(x) \neq Y$ для любой точки $x \in X$ и ставит вопрос насчет справедливости импликции а) $\to$ б) в условиях сформулированной теоремы.

В настоящей работе авторы отвечают положительно на поставленный С. Недевым вопрос, доказывая двумя разными способами следующую, более общую теорему.

Теорема 1. Для любого T_1-пространства X следующие условия равносильны:

а) X — τ-коллективно нормально (здесь τ — кардинальное число);

б) Для любого п. н. сн. $\Phi: X \to \mathfrak{C}'(Y)$, где Y — банахово пространство веса $w(Y) \leq \tau$ существует непрерывное сечение $f: X \to Y$.

Ключевую роль в обоих доказательствах играет следующая лемма.

Лемма 1. (Основная конструкция, предложенная М. Чобаном.) Пусть X — τ-коллективно нормальное пространство, Y — метрическое пространство веса $w(Y) \leq \tau$ и $\Phi: X \to \mathfrak{C}'(Y)$* — п. н. сн. Тогда существуют:

а) семейство $\{w_n = \{U^n_\alpha / \alpha \in A_n\} / n = 1, 2, \ldots\}$ открытых, локально конечных покрытий пространства X;

б) семейство $\{\gamma_n = \{V^n_\alpha / \alpha \in A_n\} / n = 1, 2, \ldots\}$ открытых, локально конечных покрытий пространства Y; и

в) отображения $w_n: A_{n+1} \to A_n$ такие, что

1) $[U^n_\alpha] \subset \Phi^{-1}(V^n_\alpha)$:

2) $U^n_\alpha = \cup \{U^{n+1}_\beta / \beta \in w_n^{-1}(\alpha)\}$;

3) $V^n_\alpha = \cup \{V^{n+1}_\beta / \beta \in w_n^{-1}(\alpha)\}$;

4) $\operatorname{diam}(V^n_\alpha) < 2^{-n}$.

---

* Здесь, конечно, речь о выпуклости элементов семейства $\mathfrak{C}'(Y)$ идти не может.

В ходе конструкции применяется

Лемма 2. (С. Недев, [2], [3]). Пусть X — τ-коллективно нормальное пространство, X' замкнуто в X, ω — семейство открытых подмножеств X мощности $|\omega|\leq\tau$, покрывающее X' и точечно конечное в точках X'. Тогда существует локально конечное в X семейство ω' открытых подмножеств X, покрывающее X' и вписанное в ω.

Доказательство леммы 1. Пусть $\{\gamma'_n=\{W^n_\lambda/\lambda\in\Lambda_n\}/n=1, 2, \ldots\}$ такое семейство открытых локально конечных покрытий пространства Y, что $\operatorname{diam}(W^n_\lambda)<2^{-n}$ (ясно, $|\Lambda_n|\leq\tau$). При помощи леммы 2 в покрытие $\Phi^{-1}(\gamma'_1)$ вписываем открытое локально конечное покрытие $\omega_1=\{U^1_\alpha/\alpha\in A_1\}$ пространства X так, что $[U^1_\alpha]\subset\Phi^{-1}(V^1_\alpha)$ для любого $\alpha\in A_1$. Здесь положено $A_1=\Lambda_1$ и $V^1_\alpha=W^1_\alpha$. Предположим, что уже построены ω_k и γ_k для $k=1, 2, \ldots, n$. Сужение $\Phi/[U^n_\alpha]=\Phi^n_\alpha:[U^n_\alpha]\to\mathfrak{C}'(Y)$ является п. н. сн. и поэтому в покрытие $\{(\Phi^n_\alpha)^{-1}(V^n_\alpha\cap W^{n+1}_\lambda)/\lambda\in\Lambda_{n+1}\}$ пространства $[U^n_\alpha]$ можно вписать открытое локально конечное покрытие $\{\Gamma^{n+1}_{\alpha,\lambda}/\lambda\in\Lambda_{n+1}\}$. Положим $A_{n+1}=A_n\times\Lambda_{n+1}$, $U^{n+1}_\beta=U^n_\alpha\cap\Gamma^{n+1}_{\alpha,\lambda}$ $V^{n+1}_\beta=V^n_\alpha\cap W^{n+1}_\lambda$, где $\beta=(\alpha,\lambda)$. После этого определяем отображение $w_n:A_{n+1}\to A_n$ следующим образом: для любого $\beta=(\alpha,\lambda)\in A_{n+1}$ полагаем $w_n(\beta)=\alpha$. Таким образом индуктивный шаг сделан и лемма 1 доказана.

Теперь, применяя последовательно леммы II. 5, II. 6 и II. 8 из работы М. Чобана [4], получаем такой результат:

Лемма 3. Если в условиях леммы 1 пространство Y полно, то отображение Φ допускает п. н. сн. сечение $\psi:X\to\mathfrak{C}(Y)$.

Переходим к доказательству импликации а) $\to$ б) теоремы. По лемме 3, Φ допускает п. н. сн. сечение $\psi:X\to\mathfrak{C}(Y)$. Для каждой точки $x\in X$ положим $\varphi(x)=[\operatorname{conv}(\psi(x))]$, где множество справа означает замкнутую выпуклую оболочку множества $\psi(x)$. Как известно, $[\operatorname{conv}(\psi(x))]$ является выпуклым компактным подмножеством пространства Y, а $\varphi:X\to\mathfrak{C}(Y)$ — п. н. сн. отображение (см. [1]). Ясно, что φ есть сечение для Φ. Теперь можем воспользоваться замечанием С. Недева, сделанным в начале заметки, о том, что φ допускает однозначное непрерывное сечение f. Очевидно, f является сечением и для Φ.

Второй способ доказательства опирается на следующей лемме.

Лемма 4. В условиях леммы 1, существует семейство

$\{\varphi_n=\{f^n_\alpha/\alpha\in A_n\}/n=1, 2, \ldots\}$

непрерывных разбиений единицы такое, что:

1) $f^n_\alpha(X\setminus U^n_\alpha)=0$

2) $f^n_\alpha(x)=\Sigma\{f^{n+1}_\beta(x)\mid\beta\in w_n^{-1}(\alpha)\}$

для каждой точки $x\in X$ и любых $\alpha\in A_n$ и $n=1, 2, \ldots$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предположить, что U^n_α являются F_σ-множествами в X для любых n и $\alpha\in A_n$. Допустим, что построены $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и построим φ_{n+1}. Для каждого U^{n+1}_β существует непрерывная функция $\tilde{f}^{n+1}_\beta:X\to[0, 1]$*, такая, что $(\tilde{f}^{n+1}_\beta)^{-1}(0, 1]=U^{n+1}_\beta$. Если $x\in U^n_\alpha$, то $\Sigma\{\tilde{f}^{n+1}_\beta(x)/\beta\in w_n^{-1}(\alpha)\}\neq 0$. Поэтому можем считать, что

$\Sigma\{\tilde{f}^{n+1}_\beta(x)\mid\beta\in w_n^{-1}(\alpha)\}=1$*.

Положим $f^{n+1}_\beta(x)=\tilde{f}^{n+1}_\beta(x)\cdot f^n_{w_n(\beta)}(x)$ и тогда равенство (2) выполнено, а семейство $\{\varphi_{n+1}=\{\tilde{f}^{n+1}_\alpha)\alpha\in A^{n+1}\}$ искомое. Лемма доказана.

* $\tilde{f}^{n+1}_\beta$ предполагаем непрерывной только на $U^n_{w_n(\beta)}$.

Теперь, чтобы доказать импликацию а) $\rightarrow$ б) теоремы, поступаем так: Фиксируем по точке $y^n_\alpha \in V^n_\alpha$ для любых n и $\alpha \in A_n$ и определяем отображение $f_n: X \rightarrow Y$ по правилу

$$f_n(x) = \Sigma\{f^n_\alpha(x) \cdot y^n_\alpha / \alpha \in A_n\}.$$

Нетрудно проверить, что выполняются условия:

1) $f_n(x) \in O_{2^{-n}}(\Phi(x))$

2) $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| < 2^{-n}$

для любых точки $x \in X$ и $n = 1, 2, \ldots$.

После этого положим $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ для любой точки $x \in X$. Очевидно, что отображение $f: X \rightarrow Y$ есть непрерывное сечение для Φ.

Тираспольский Пединститут
г. Тирасполь, СССР

Институт математики и механики
Болгарская академия наук
София, Болгария

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Michael. Annals of Math. **63**, 1956, 2, 361. [2] С. Недев. Изв. Матем. инст. БАН. **15**, 1974, 389. [3] С. Недев. Сердика (в печати). [4] М. Чобан. Тр. Моск. Матем. об-ва. **23**, 1970, 277.