С. А. Богатый, В. М. Вылов, О весе бикомпактных ретрактов, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1988, номер 4, 96–97

5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью//Матем. сб. 1960. **51**, № 1. 99—128.
6. Villari G. On the existence of periodic solutions for Lienard's equations//Nonlin. Anal., Theory, Meth., Appl. 1983. 7, N 1. 71—78.
7. Zanolin F. Periodic solutions for differential equations of Rayleigh type//Rend. Ist. mat. Univ. Trieste. 1980. **12**, N 1—2. 69—77.
8. Картрайт М. Л., Свиннертон-Дайер Х. П. Ф. Теоремы ограниченности для некоторых дифференциальных уравнений второго порядка//Дифференц. уравнения. 1978. **14**, № 11. 1941—1979.

Поступила в редакцию
19.06.87

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1988. № 4

УДК 515.15

С. А. Богатый, В. М. Вылов

О ВЕСЕ БИКОМПАКТНЫХ РЕТРАКТОВ

В работе показывается, что бикомпакт X имеет вес $\leqslant\tau$ тогда и только тогда, когда $X\in AN_\tau R$ и $\dim X\leqslant\tau^+$. Этот результат является усилением известной теоремы Е. В. Щепина о метризуемости конечномерного бикомпактного абсолютного окрестностного ретракта [1] и опирается на другой результат Е. В. Щепина о вложении тихоновского куба [2].

Мы ограничиваем себя рассмотрением только бикомпактных пространств, а τ это всегда бесконечный кардинал. Со всеми понятиями, неопределяемыми в данной работе, можно ознакомиться в [3].

Определение 1. Бикомпакт X называется абсолютным τ-окрестностным ретрактом ($X\in AN_\tau R$), если для всякого вложения $X\subseteq Y$ в бикомпакт Y найдется такое G_τ-подмножество (пересечение τ экземпляров открытых множеств) Z, что $X\subseteq Z\subseteq Y$ и X является ретрактом Z.

Очевидным образом понятия $AN_\tau R$ и $AN_\tau E$ совпадают. Менее очевидной является следующая теорема, характеризующая $AN_\tau R$-бикомпакты, доказательство которой почти дословно повторяет рассуждения Е. В. Щепина из [3].

Теорема. *Для бикомпакта X следующие условия эквивалентны:*
1. $X\in AN_\tau R$.
2. *Существует такой вполне упорядоченный непрерывный спектр* $S=\{X_\alpha,\ p_\beta^\alpha,\ \alpha<w(X)\}$, *что* X_0 *это бикомпакт веса* $\leqslant\tau$, $p_\alpha^{\alpha+1}$ — *мягкие отображения с ядром веса* $\leqslant\tau$ *и* $X=\varprojlim S$.

Здесь необходимо отметить, что всякий бикомпакт веса $\leqslant\tau$ является $AN_\tau R$-бикомпактом (так как $X\subseteq I^\tau$ имеет тип G_τ). По аналогии с отображениями с метризуемым ядром отображение $f:Y\to Z$ бикомпактов имеет ядро веса $\leqslant\tau$, если существуют такой бикомпакт K веса $\leqslant\tau$ и вложение $i:Y\subseteq Z\times K$, что $f=p_Z\circ i$, где $p_Z:Z\times K\to Z$ — проекция на первый сомножитель.

Следствие 1. *Если* $X\in AN_\tau R$ *и* $w(X)\geqslant\lambda>\dot{\tau}$, *где* λ — *регулярный кардинал, то в* X *существует подмножество, гомеоморфное* I^λ.

Доказательство. Пусть $X=\varprojlim\{X_\alpha,\ p_\alpha^\beta\}$, где спектр удовлетворяет условию 2 теоремы. Покажем, что существует такая точка $x\in X$, что $p_0^{-1}(x)\subseteq X$ имеет вес $\geqslant\lambda$. Допустим противное. Тогда для всякой точки $y\in p_0^{-1}(x)$ имеет место неравенство $\chi(y,\ p_0^{-1}(x))\leqslant w(p_0^{-1}(x))<\lambda$. Так как $\chi(p_0^{-1}(x),\ X)=\chi(x,\ X_0)\leqslant\tau$, то $\chi(y,\ X)<\lambda$. Таким образом, для любой точки $y\in X$ справедливо неравенство $\chi(y,\ X)<\lambda$. Несложно показать, что если $X\subseteq I^\mu$, то Z из определения 1 можно взять замкнутым и цилиндрическим, т. е. $Z=K\times I^A$, где $w(K)\leqslant\tau$.

Рассмотрим ретракцию $r:K\times I^A\to X$. Так как характер каждой точки в X меньше λ и λ — регулярный кардинал, то [4] существует такое множество $B\subseteq A$, что $|B|<\lambda$ и ретракция r факторизуется через грань $K\times I^B$. Тем самым X является непрерывным образом $K\times I^B$ и поэтому $w(X)\leqslant|B|\cdot w(K)<\lambda$, что противоречит условию. Следовательно, для некоторой точки $x\in X_0$ бикомпакт $p_0^{-1}(x)$ имеет вес $\geqslant\lambda$.

С другой стороны, $p_0^{-1}(x)\in AR$, так как p_0 это мягкое отображение. Далее необходимо к бикомпакту $p_0^{-1}(x)$ применить теорему Е. В. Щепина [2] о вложении гильбертова куба.

Определение 2 [5]. Говорят, что $\dim X\leqslant\tau$, если к любой системе мощности τ, состоящей из пар дизъюнктных множеств $(F_{+\alpha}, F_{-\alpha})$, можно подобрать такие перегородки C_α между $F_{+\alpha}$ и $F_{-\alpha}$, что $\bigcap C_\alpha=\varnothing$.

Следствие 2. *Для бикомпакта X следующие условия эквивалентны*:

1) $w(X)\leqslant\tau$;
2) $X\in AN_\tau R$ *и* $\dim X\leqslant\tau^+$;
3) $X\in AN_\tau R$ *и X не содержит* I^{τ^+}.

Доказательство. Если $w(X)\leqslant\tau$, то $X\in AN_\tau R$ и $\dim X\leqslant\tau^+$ в силу следствия 1 из [5]. Если же $\dim X\leqslant\tau^+$, то согласно следствию 2 из [5] бикомпакт X не содержит тихоновский куб I^{τ^+}.

Если же $X\in AN_\tau R$ и X не содержит I^{τ^+}, то согласно следствию 1 настоящей работы (в силу регулярности кардинала τ^+) выполнено нужное неравенство $w(X)\leqslant\tau$.

Замечание. Было бы интересно провести исследование класса $AN_\tau R$-пространств в категории p-паракомпактов. В какой-то степени наши результаты можно переносить с бикомпактов на общие p-паракомпакты, однако в случае $\tau\geqslant\aleph_1$ формулировки существенно усложняются. В случае же $\tau=\aleph_0$ метризуемость соответствующего пространства X доказана в работе [6] даже для более широкого (чем $AN_{\aleph_0}R$) класса пространств, не содержащих $I^{\aleph_1}$.

Данная работа выполнена во время визита второго автора в Москву в рамках совместной темы Софийского и Московского университетов. Он сердечно благодарен сотрудникам кафедры общей топологии и геометрии за радушный прием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щепин Е. В. Любой конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуем//Докл. АН СССР. 1977. **233**, № 3. 304—307.
2. Scepin E. Sur les applications continues des cubes de Tihonov//C. R. Acad. sci. A. 1979. **288**. 257—260.
3. Щепин Е. В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров// //Успехи матем. наук. 1976. **31**, вып. 5. 191—226.
4. Pol R., Puzio-Pol E. Remarks on cartesian products//Fund. Math. 1976. **93**, N 1. 57—69.
5. Хаджииванов Н. О бесконечномерных пространствах//Bull. Acad. pol. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. 1971. **19**, N 6. 491—500.
6. Tsuda K. Metrizability of general *ANR*//Proc. Amer. Math. Soc. 1986. **96**, N 2. 375—378.

Поступила в редакцию
26.06.87