Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 32, N° 8, 1979

МАТЕМАТИКА
Топология

О ВЕСЕ БИКОМПАКТОВ С РЕШЕТКАМИ ИЗ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. М. Вылов

(Представлено академиком Б. Петканчиным 20. III. 1979)

В [1] Шапиро изучает такие бикомпакты X, для которых $\exp X$ является образом произведения бикомпактов. Здесь через $\exp X$ обозначается пространство замкнутых подмножеств данного пространства X в топологии Виеториса. Введенное Щепиным [3] понятие решетка позволяет обобщить результаты Шапиро и получать новые.

Определение 1. [3] Внутренним произведением семейства непрерывных отображений $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha\}$, где X-бикомпакт, называется отображение X в его фактор-пространство по разбиению, порожденному диагональным произведением $\underset{\alpha}{\Delta} f_\alpha$. Внутреннее произведение будем обозначать через $\underset{\alpha}{\bigotimes} f_\alpha$, а через $\Phi(X)$ — совокупность всех факторных отображений X.

Определение 2. [3] Пусть $\tau \geq \aleph_0$ некоторое кардинальное число. Подсемейство $\psi \in \Phi(X)$ называется τ-решеткой, если выполнены следующие условия:

P1) Если семейство $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \psi$ такого, что для любого конечного набора $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2} \dots \varphi_{\alpha_k}$ его внутреннее произведение $\bigotimes_{i=1}^{k} \varphi_{\alpha_i} \in \psi$, тогда и $\bigotimes_{\alpha \in A} \varphi_\alpha \in \psi$.

P2) Для любого отображения $f \in \Phi(X)$ существует такое $\varphi \in \psi$, что $\varphi < f$ (т. е. равенство $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ всегда влечет за собой равенство $f(x_1) = f(x_2)$), причем, если $wf(X) \leq \tau$, то и $w\varphi(X) \leq \tau$.

Решеткой называем семейство, являющееся τ-решеткой при любом $\tau \geq \aleph_0$.

Лемма 1. Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и $H \subset F$ — такие замкнутые в X подмножества, что $\chi(F, X) \leq \lambda$, $\pi\chi(H, F) \leq \mu$. Тогда существуют замкнутое $P \subset H$ и отображение φ из решетки, что $w\varphi(X) \leq \tau + \lambda + \mu$ и $\varphi^{-1}\varphi(P) = P$.

Следующая теорема доказывается при помощи леммы 1.

Теорема 1. Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и $F = [F] < X$ такое, что $X(F, X) \leq \lambda$. Пусть $f : F \to Y$ непрерывное отображение ⟨⟨На⟩⟩ и $M \subset Y$. Если $\pi\chi(y,) \leq \mu$ для всех $y \in M$, то $w[M] \leq \tau + \lambda + \mu$.

Следствие 1. Пусть бикомпакт X имеет решетку из открытых отображений и Y-непрерывным образом X. Тогда $w(Y) = \pi w(Y) = \chi(Y) = \pi\chi(Y)$.

Лемма 2. Пусть $F = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ — конечное подмножество X, причем $\pi\chi(x_i, X) \leq \tau$ для любого $t \leq k$. Тогда $\pi\chi(\widehat{F}, \exp X) \leq \tau$. Через $\widehat{F}$ мы обозначаем множество F как точка $\exp X$.

Замечание. Если находимся в условии леммы 1 и $k \leq n$, то $\pi\chi(\widehat{F}, \exp_n X) \leq \tau$, где $\exp_n F$ — n — Я симметрическая степень пространства X.

Лемма 3. Пусть X — бикомпакт и $w(X) \geq \tau^+$. Пусть $\exp X (\exp_n X)$ является непрерывным образом некоторого замкнутого G_τ-подмножества бикомпакта с τ-решеткой из открытых отображений. Тогда в X существует открытое подмножество U такое, что $\pi\chi(x, X) \geqq \tau^+$ для всех $x \in U$.

Доказательство леммы 3 основано на применении леммы 2, замечании к лемме 2 и теореме 1.

Теорема 2. Пусть бикомпакт X имеет τ^+-решетку из открытых отображений со свойством: с $(\varphi^{-1}\varphi(x) \leqq \tau$ для всех $x \in X$ и для всех φ из решетки. Пусть $f: X_0 \to \exp У$ — непрерывное отображение ⟨⟨На⟩⟩, где $У$ — бикомпакт, X_0 — замкнутое подмножество X и $\chi(x_0, X) \leqq \tau^+$. Тогда $w(У) \leqq \tau^+$.

Доказательство теоремы 2 проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 [1], причем лемма 3 играет ту же роль, которую лемма 4 [4] играет в доказательстве теоремы 2 [1].

Теорема 3. Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений со свойством: $\varphi^{-1}\varphi(x)$ — локально-связно для всех $x \in X$ и φ из решетки. Пусть $У$ — бикомпакт и $\exp У$ — непрерывный образ некоторого замкнутого G_τ-подмножества X. Тогда $w(У) \leqq \tau$.

Из результатов Щепина [4] получается следующее

Следствие 2. Пусть бикомпакт $X \in$ ANR. Пусть $У$ — бикомпакт и $\exp У$ — непрерывный образ некоторого замкнутого G_δ-подмножества X. Тогда $w(У) \leqq \aleph_0$.

Из результатов Ташметова [7] получается следующее

Следствие 3. $\exp X$ есть непрерывный образ бикомпактного ANR тогда и только тогда, когда X есть локально-связный компакт.

Лемма 4. [4]. Пусть X — бикомпакт и $w(X)\tau$ — несчетный регулярный кардинал. Пусть $f: I^\tau \to X$ — непрерывное отображение ⟨⟨На⟩⟩. Тогда существует замкнутое подмножество $F \subset I^\tau$ такое, что $F \overset{\text{top}}{=} I^\tau$ и рестрикция $f_{/F}$ — гомеоморфизм.

Определение 4. Пусть X — бикомпакт и ψ — решетка для X. Будем говорить что решетка ψ обладает свойством (*): если $\varphi^{-1}\varphi(x)$ANR для всех $x \in X$ и для всех $\varphi \in \psi$.

Теорема 4. Пусть для бикомпакта X существует точка $x_0 \in X$ такая, что $\chi(x_0, X) = w(X)$ и $w(X)$ — несчетный регулярный кардинал. Тогда для любого $n \geqq 2$ $\exp_n X$ не имеет решетки со свойством (*).

Доказательство теоремы 4 основано на применении спектральной теоремы Щепина и леммы 4.

Следствие 4. Пусть X — бикомпакт $w(X) \geqq \aleph_1$. Тогда для любого $n \geqq 2$ $\exp_n X$ не является ANR.

Теоремы 1, 2, 3, 4 являются обобщением соответственно теоремы 1, 2, 3, 4 из [1].

Теорема 5. Пусть X — бикомпакт и $w(X) = \tau$ — несчетный регулярный кардинал. Пусть $\exp_n X$ является непрерывным образом бикомпакта, который имеет решетку из открытых отображений со свойством (*). Тогда множество $M = \{x \in X . \chi(x, X) = w(X)\}$ имеет непустую внутренностью и для любой точки $x \in \langle M \rangle$ и любой ее окрестности $O(x)$ существует замкнутое подмножество F_x такое, что $F_x \subset O(x)$ и $F_x \overset{\text{top}}{=} I^\tau$.

Автор выражает благодарность Г. Скордеву за постоянное внимание к его работе и за ценные советы.

Сектор „Топология"
Институт математики
Болгарской академии наук
София, Болгария

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Шапиро. ДАН СССР. 231, 1976, 2. Id. Ibid. 228, 1976, 6. [3] Е. Щепин. УМН. 31, 1976, 5. [1] Id. ДАН СССР. 233, 1977, 3. [5] Б. Шапировский. Ibid. 223, 1975, 4. [6] Id. Ibid. 206, 1972, 3. [7] У. Тамшетов. Сиб. мат. ж. 15, 1974, 5.