МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ
Доклади на Девета пролетна конференция на СМБ. Слънчев бряг, 3—6 април 1980
София, БАН, 1980

ФАКТОРИЗАЦИОННИ ТЕОРЕМИ

Веско Вълов

Доказват се факторизационни теореми за кардиналната размерност K и индуктивната размерност Ind. Показано е, че за широк клас от компакти не е определена трансфинитната индуктивна размерност ind.

1. В настоящата работа използваме следните означения:

$w(X)$ – тегло на пространството X;

τ, λ, μ – безкрайни кардинални числа;

τ^+ – следващото след τ кардинално число;

$AR(ANR)$ – абсолютен (околностен) ретракт в класа на компактите;

$\chi(F, X)$ – характер на множеството F в пространството X;

Казваме, че F е G_τ -подмножество на X, ако $\chi(F, X) \leq \tau$.

Вътрешно произведение на семейството от непрекъснати изображения $\{f_\alpha : X \to Y_\alpha, \alpha \in A\}$, където X е компакт, се начира изображение на X в неговото фактор-пространство по разбиването, породено от диагоналното произведение $\underset{\alpha}{\Delta} f_\alpha$ (вж [8]). Вътрешното произведение ще означаваме с $\underset{\alpha}{\otimes} f_\alpha$, а с $\phi(X)$ – съвокупността на всички факторни изображения, дефинирани върху X. Очевидно, ако всички Y_α са хаусдорфови пространства, то $(\underset{\alpha}{\Delta} f_\alpha)(X)$ и $(\underset{\alpha}{\otimes} f_\alpha)(X)$ са хомеоморфни.

В съвокупността на всички непрекъснати изображения, дефинирани върху компакта X, въвеждаме частична наредба по следния начин: $f < g$ тогава и само тогава, когато $f^{-1}f(x) \subset g^{-1}g(x)$ за всяко $x \in X$.

Нека X е компакт. Подсемейството $\Psi \subset \phi(X)$ се нарича τ -решетка (вж [8]), ако са изпълнени условията:

Р1. Ако семейството $\{\varphi_\alpha : \alpha \in A\} \subset \Psi$ притежава свойството: $\overset{k}{\underset{i=1}{\otimes}} \varphi_{\alpha_i} \in \Psi$ за всеки краен набор $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, то $\varphi_2 \in \Psi$.

Р2. За всяко изображение $f \in \phi(X)$ съществува такова изображение $\varphi \in \Psi$, че $\varphi < f$, при това ако $wf(X) \leq \tau$ то и $w\varphi(X) \leq \tau$.

Решетка се нарича семейство, което се явява τ -решетка за всяко $\tau \geq \aleph_0$. По-нататък ще разглеждаме такива τ -решетки Ψ, че $\varphi(X)$ е T_2 -пространство за всяко $\varphi \in \Psi$, а в условието Р2 искаме $f(X)$ също да е T_2 -пространство.

Пример 1, [8]. Ако $X \in AR$, съответно $X \in ANR$, то X притежава такава решетка Ψ от отворени изображения, че $\varphi(X) \in AR$, съответно $\varphi(X) \in ANR$ за всяко $\varphi \in \Psi$.

Пример 2, [8]. Ако X е пространство на Дугунджи (вж [4]), то X притежава решетка Ψ от отворени изображения, такава че за всяко $\varphi \in \Psi$, $\varphi(X)$ също е пространство на Дугунджи.

Пример 3, [1] Нека G е компактна топологична група. Тогава всички непрекъснати хомоморфизми, дефинирани върху G, образуват решетка.

Казваме, че пространството X има кардинална размерност K, не по-голяма от τ (вж [7]), ако за всяка система с мощност $\tau + 1$, състояща се от затворени, непресичащи се множества $F_{+\alpha}$, $F_{-\alpha}$, съществуват преградки C_α между $F_{+\alpha}$ и $F_{-\alpha}$, за които $\bigcap_\alpha C_\alpha = \phi$. Ако пространството X е нормално и $\tau = n$, то $K(X) \leq \tau$ тогава и само тогава, когато $\dim X \leq n$. Очевидно е, че размерността K е монотонна по затворените множества.

2. Приведените по-горе примери показват, че доста класове от компакти притежават решетка от отворени изображения. От друга страна, условието P2 по същество е факторизационно. Ето защо възниква естествения въпрос: ако изходният компакт принадлежи към даден клас от пространства $\mathcal{F}$ и притежава решетка Ψ, то може ли да се твърди, че изображението и компакта, чието съществуване се гарантира от известните факторизационни теореми, са съответно от Ψ и $\mathcal{F}$?

Отговор на този въпрос за размерностите K и Ind дават следващите две теореми. Да отбележим, че факторизационни теореми за размерностите K и Ind в категорията на компактните пространства и непрекъснатите изображения са получени съответно от Хаджииванов [6] и Пасынков [3].

Теорема 1. Нека Ψ е решетка за компакта X. Ако $f: X \to Z$ е непрекъснато изображение върху компакта Z, то съществуват компакт Y и непрекъснати изображения $g: X \to Y$, $h: Y \to Z$ такива, че :

1) $g \in \Psi$, $f = hg$

2) $w(Y) = w(Z)$, $k(Y) \leq k(X)$

Следствие 1. Нека G е компактна топологична група, а $f: G \to Z$ е непрекъснато изображение върху компакта Z. Тогава съществуват компактна топологична група H, непрекъснат хомоморфизъм $g: G \to H$ и непрекъснато изображение $h: H \to Z$ такива, че $f = hg$, $w(H) = w(Z)$ и $k(H) \leq k(G)$.

Следствие 2. Нека X е пространство на Дугунджи, а $f: X \to Z$ е непрекъснато изображение върху компакта Z. Тогава съществуват пространство на Дугунджи Y, отворено изображение $g: X \to Y$ и непрекъснато изображение $h: Y \to Z$ такива, че $f = hg$. $w(Y) = w(Z)$ и $k(Y) \leq k(X)$.

Следствие 3. Нека $X \in AR$, съответно $X \in ANR$, а $f: X \to Z$ е непрекъснато изображение върху компакта Z. Тогава съществуват компакт Y, който е AR, съответно ANR, отворено изображение $g: X \to Y$ и непрекъснато изображение $h: Y \to Z$ такива, че : $f = hg$, $w(Y) = w(Z)$ и $k(Y) \leq k(X)$.

Теорема 2. Нека компактът X притежава решетка Ψ от отворени изображения, а F е негово затворено подмножество с размерност $Ind\, F = \eta$. Ако $f: X \to Z$ е непрекъснато изображение върху компакта Z, то съществуват компакт Y и непрекъснати изображения $g: X \to Y$, $h: Y \to Z$ такива, че

1) $f = gh$, $w(Y) \leq max(w(Z), \chi(F, X))$

2) $ind\, f(F) \leq \eta = Ind\, F$

Явно е, че от теорема 2 се получават следствия, аналогични на горните, които се отнасят за размерността Ind.

Теорема 3. Нека компактът X е непрекъснат образ на затворено G_μ-подмножество на компакта Y, който има τ-решетка Ψ от отворени изображения със свойството: $\varphi^{-1}\varphi(y) \in ANR$ за всяко $y \in Y$ и за всяко $\varphi \in \Psi$. Ако $k(X) \leq \lambda^+$, то $w(X) \leq \tau.\lambda.\mu$.

Доказателството на теорема 3 се опира на теорема 1 и факта, че $k(I^\tau) = \tau^+$ (вж [7]).

Следствие 4. Ако компактът X е непрекъснат образ на ANR, то $k(X) \leq \lambda'_1$ тогава и само тогава, когато X е метризуем.

Следствие 4 представлява уточнение на следния резултат на Щепин [9]: всеки крайномерен ANR компакт е метризуем.

Теорема 4. Нека компактът X има τ-решетка от отворени изображения, а F е негово затворено G_λ-подмножество. Ако $f: F \to Y$ е непрекъснато, отворено изображение върху локално-свързания компакт Y, за който е определена трансфинитната индуктивна размерност ind, то $w(Y) \leq \tau.\lambda$.

Лема 1. [1]. Нека компактът X е непрекъснат, отворен образ на затворено G_λ-подмножество на компакт, който има τ-решетка от отворени изображения. Тогава всяко канонично затворено подмножество на X и неговата граница са $G_{\tau.\lambda}$-подмножества на X.

Лема 2. [1] Нека компактът X е непрекъснат образ на затворено G_λ-подмножество на компакт, който има τ-решетка от отворени изображения. Ако множеството $M = \{x \in X : \dot{\chi}(x, X) \leq \mu\}$ е гъсто в X, то $w(X) \leq \tau.\lambda.\mu$.

Доказателство на теорема 4: Без ограничение на общността можем да считаме, че Y е свързан и локално-свързан компакт. Ако успеем да покажем, че множеството $M = \{y \in Y : \chi(y, Y) = \tau.\lambda\}$ е навсякъде гъсто в Y, то по лема 2 ще имаме $w(Y) \leq \tau.\lambda$. Допускаме, че M не е гъсто в Y т.е. съществува отворено подмножество $U \subset Y$, за което $U \cap M = \phi$. Това означава, че ако P е свързано, затворено $G_{\tau.\lambda}$-подмножество на Y, за което $ind\,P = 0$, то P не се съдържа в U.

Лесно се съобразява, че фамилията $\mathcal{A}$ на свързаните и затворени $G_{\tau.\lambda}$-подмножества на Y, които се съдържат в U, е непразна. Нека $\alpha_0 = \min\{ind\,H : H \in \mathcal{A}\}$ и $H_0 \in \mathcal{A}$ е такова множество, че $ind\,H_0 = \alpha_0$. Очевидно $\alpha_0 > 0$. Нека V е отворено подмножество на H_0, за което $ind\,\Gamma_{pH_0} V < \alpha_0$. Тъй като H_0 е свързано пространство, затвореното множество $L_1 = [V] \setminus \langle [V] \rangle_{H_0}$ е непразно, и съгласно лема 1 L_1 е $G_{\tau.\lambda}$-подмножество на Y.

Използвайки локалната свързаност на Y построяваме затворено и свързано $G_{\tau.\lambda}$-подмножество $L \subset Y$, такова че $L \subset L_1$. Следователно $L \in \mathcal{A}$. От друга страна $ind\,L \leq ind\,L_1 \leq ind\,\Gamma_{pH_0} V < \alpha_0$, което противоречи на $L \in \mathcal{A}$. С това теоремата е доказана.

Следствие 5. Нека локално-свързаният компакт X е непрекъснат, отворен образ на затворено G_δ-подмножество на компакт с решетка от отворени изображения. Ако за X е определена трансфинитната индуктивна размерност ind, то X е метризуем.

Следствие 5 обобщава резултатите на Ефимов [2] и Федорчук [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.М.Вълов, Кандидатска дисертация, София, 1979.
2. Б.А.Ефимов, Решение некоторых задач о диадических бикомпактах, ДАН СССР 187:1 1969, 21-24
3. Б.А.Пасынков, О размерности нормальных пространств, ДАН СССР 201:5 1971, 1049-1052

4. А.Пелчинский, Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения, М., 1970
5. В.В.Федорчук, О размерности $\varkappa$ -метризуемых бикомпактов, в частности пространств Дугунджи, ДАН СССР 234:1 1977 , 30-33.
6. Н.Хаджииванов, Лекции по теория на размерностите, 1972.
7. Н.Хаджииванов, О бесконечномерных пространствах, Бюл.Пол.Ак.наук 19:6 1971 , 491-500.
8. Е.В.Щепин, Топология предельных пространств несчетных обратных спектров, УМН 31:5 1976 , 191-226 .
9. Е.В.Щепин, Конечномерный бикомпактный абсолютный ретракт метризуем, ДАН СССР 233:3 1977 , 304-307 .

FACTORIZATION THEOREMS

Vesko M. Valov

Factorization theorems for the cardinal dimension k and for the large inductive dimension are proved. It is shown that the transfinite small inductive dimension is not defined for a large class of compact spaces.