Доклады Болгарской академии наук
Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences
Tome 34, № 8, 1981

МАТЕМАТИКА
Топология

О СВОБОДНЫХ ГРУППАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В. М. Вылов, Б. А. Пасынков

(Представлено академиком Б. Петканчиным 21. III. 1981)

Рассматриваются только тихоновские пространства и только непрерывные отображения. Далее, $iw(X) = \min\{\tau: X$ уплотняется на пространство веса $\leq\tau\}$, $d(X)$ — плотность X, $C_p(X)$ — пространство непрерывных вещественных функций на X в топологии поточечной сходимости. Если $f: X\to Y$, то $f^*: C_p(Y)\to C_p(X)$ двойственное к f отображение. Множество $f^*(C_p(Y))$ замкнуто в $C_p(X)$ тогда и только тогда, когда отображение f факторное [1]. Для отображений $f: X\to Y$ и $h: X\to Z$ пишем $f<h$, если существует отображение $g: f(X)\to Z$ такое, что $h=gf$. Через $F(X)$ обозначается свободная (в смысле Маркова) топологическая группа пространства X, а через βX — его расширение Стоуна-Чеха.

Результаты первой части статьи принадлежат В. М. Вылову, результаты второй части — Б. А. Пасынкову.

1. Архангельский [1] доказал, что если для бикомпактов X и Y пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ линейно гомеоморфны и $\dim X=n$, то $\dim Y=\dim X=n$.

Здесь при помощи методов Архангельского [1,2] эта теорема распространяется на класс пространств более широкий, чем класс бикомпактов.

Определение 1. [2]. Семейство M отображений пространства X называется $\aleph_1$-редукцией этого пространства, если: 1) каждое $f\in M$ факторно и $iw(f(X))\leq\aleph_0$; 2) если $\lambda\subset M$ и $|\lambda|\leq\aleph_0$, то существует $f\in M$ такое, что $f<g$ для всех $g\in\lambda$; 3) если $\lambda\subset M$, $|\lambda|\leq\aleph_0$ и λ линейно упорядочено отношением $<$, то существуют $f\in M$ и уплотнение φ пространства $f(X)$ такие, что φf есть диагональное произведение $\Delta\lambda$; 4) для каждого $\varphi\in C_p(X)$ существуют $f\in M$ и $\varphi'\in C_p(f(X))$, такие, что $\varphi=\varphi' f$.

Определение 2. Будем говорить, что $\aleph_1$-редукция M пространства X замкнута, если семейство M $\aleph_0$-замкнуто [1] (т. е. $\Delta\lambda\in M$ для любого счетного и линейно упорядоченного подсемейства $\lambda\subset M$).

Для замкнутой $\aleph_1$-редукции M условия 2) и 4), вместе взятые, эквивалентны условию 5: для каждого отображения $\varphi: X\to Y$, где $w(Y)\leq\aleph_0$, существуют $f\in M$ и $\varphi': f(X)\to Y$ такие, что $\varphi=\varphi' f$.

Следующие два утверждения доказаны Архангельским [2].

А. Семейство M является $\aleph_1$-редукцией пространства X в том и только в том случае, когда семейство $\{f^*(C_p(f(X))): f\in M\}$ является $\aleph_1$-аппроксимацией пространства $C_p(X)$ (определение $\aleph_1$-аппроксимации содержится в [2]).

Б. Для любых двух $\aleph_1$-аппроксимаций $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ пространства X их теоретико-множественное пересечение $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2$ является $\aleph_1$-аппроксимацией пространства X.

Здесь мы будем рассматривать пространства X, имеющие замкнутой $\aleph_1$-редукцией M со свойством (P): для каждого $f \in M, f(X)$ — полное по Чеху, сепарабельное метризуемое пространство.

В. Пусть X — финально компактное, полное по Чеху пространство. Тогда семейство всех совершенных отображений X на пространства со счетной базой является замкнутой $\aleph_1$-редукцией со свойством (P).

Г. Пусть X — произведение сепарабельных, полных метрических пространств X_α, $\alpha \in A$, и U открыто в X. Тогда семейство $\Pi = \{\pi_B : B \subset A, |B| \leq \aleph_0\}$, где π_B — проекция $U \to \Pi\{X_\alpha : \alpha \in B\}$, является замкнутой $\aleph_1$-редукцией пространства U, удовлетворяющей условию (P).

Лемма 1. Если $\dim \beta X = n$ и для любого $f \in M$, где M — замкнутая $\aleph_1$-редукция пространства $X, wf(X) \leq \aleph_0$, то семейство $M(n) = \{f \in M : \dim f(X) \leq n\}$ — тоже замкнутая $\aleph_1$-редукция пространства X.

Доказательство. Условие 1) выполнено. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — счетное подсемейство $M(n)$ и $f_k > f_{k+1}$, $k = 1, 2$. Тогда при $k < m$ существует отображение $\varphi_k^m : f_m(X) \to f_k(X)$. Пусть $Y = \overrightarrow{\lim}\{f_k(X), \varphi_k^m\}$. Очевидно, что $Z = (\Delta f_i)(X) \subset Y$ и $w(Y) \leq \aleph_0$. Так как $\dim f_k(X) \leq n$, то $\dim Z \leq \dim Y \leq n$ [5]. Но $\Delta f_i \in M$, следовательно $\Delta f_i \in M(n)$.

Пусть $f_0 : X \to Y_0$ и $w(Y_0) \leq \aleph_0$. При помощи факторизационной теоремы Пасынкова [6] и условия 5. по индукции определяем пространства Y_k и отображения $f_k : X \to Y_k, f_k^{k+m} : Y_{k+m} \to Y_k$ такие, что $f_k(X) = Y_k, w(Y_k) \leq \aleph_0, f_k^{k+m} f_{k+m} = f_k$, $\dim Y_{2k+1} \leq n$ и $f_{2k+2} \in M, k = 0, 1, \ldots m = 0, 1, \ldots$ Если $Y = \overleftarrow{\lim}\{Y_{2k+2}, f_{2k+2}^{2k+4}, k = 0, 1, \ldots\} = \overleftarrow{\lim}\{Y_{2k+1}, f_{2k+1}^{2k+2}, k = 0, 1, \ldots\}$, то $w(Y) \leq \aleph_0$, $\dim Y \leq n$ и $f = \Delta f_{2k} \in M$. Следовательно $f < f_0$ и $f \in M(n)$. Лемма доказана.

Ниже через $C(X)$ обозначается множество всех ограниченных непрерывных вещественных функции на X.

Лемма 2. Пусть X и $\widetilde{X}$ — предельные пространства спектров $\{X_\alpha, p_\alpha^s, \alpha \in A\}$ и $\{\beta X_\alpha, \beta p_\alpha^s, \alpha \in A\}$, соответственно, а проекции $p_\alpha : X \to X_\alpha$ являются отображениями „на". Если A не содержит счетное конфинальное подмножество, то $\widetilde{X} = \beta X$ тогда и только тогда, когда $C(X) = \cup\{p_\alpha^*(C(X_\alpha)) : \alpha \in A\}$.

Доказательство. Если $C(X) = \cup\{p_\alpha^*(C(X_\alpha)) : \alpha \in A\}$ и $f \in C(X)$, то $f = g \cdot p_\alpha$ для некоторых $\alpha \in A$ и $g \in C(X_\alpha)$. Пусть $\widetilde{g} : \beta X_\alpha \to R$ — продолжение отображения g. Тогда $\widetilde{f} = \widetilde{g}_0 \beta p_\alpha : \widetilde{X} \to R$ является продолжением отображения f. Следовательно $\widetilde{X} = \beta X$. Обратное утверждение леммы легко следует из доказательства леммы 1, стр. 204 работы (7).

Теорема 1. Пусть пространства X и Y имеют замкнутые $\aleph_1$-редукции, удовлетворяющие условию (P). Если пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ линейно гомеоморфны (в частности, если группы $F(X)$ и $F(Y)$ топологически изоморфны) и $\dim \beta X = n$, то $\dim \beta Y = \dim \beta X = n$.

Доказательство. Пусть M' и M'' — замкнутые $\aleph_1$-редукции пространства X и Y, которые удовлетворяют условию (P). Можно считать, что $C_p(X) = C_p(Y)$ и $w(Y) > \aleph_0$. В силу леммы 1 и утверждений А и Б пересечение $\mathcal{O}$ семейств $\{f^*(C_p(f(X))) : f \in M'(n)\}$ и $\{g^*(C_p(g(Y))) : g \in M''\}$ является $\aleph_1$-аппроксимацией пространства $C_p(Y)$. Поэтому семейство $M = \{g \in M'' : g^*(C_p \times (g(Y))) \in \mathcal{O}\}$ является замкнутой $\aleph_1$-редукцией пространства Y. Для любого $g \in M$ существует $f \in M'(n)$, такое, что пространства $C_p(g(Y))$ и $C_p(f(X))$ линейно гомеоморфны. Теперь из теоремы Павловского [4] следует, что $\dim g(Y) = \dim f(X) \leq n$. Пусть $\widetilde{Y} = \overleftarrow{\lim}\{g(Y), g \in M\}$ и $cY = \overleftarrow{\lim}\{\beta(g(Y)), g \in M\}$. Диагональное произведение $\Delta\{g : g \in M\}$ гомеоморфно отображает Y на всюду плотное подмножество пространства $\widetilde{Y}$ и каждая функция $f \in C(Y)$ непрерывно продолжается на $\widetilde{Y}$. Поэтому $\beta Y = \beta \widetilde{Y}$ и $\cup \{p^*(g)(C(g(Y))) \colon g \in M\} = C(\widetilde{Y})$, где $p(g)$ проекция $\widetilde{Y} \to g(Y)$. Но $w(Y) > \aleph_0$. Следовательно M не имеет счетного конфинального подмножество и по лемме 2 $\beta Y = cY$. Отсюда и из $\dim \beta(g(Y)) = \dim g(Y) \leqq n$ получаем, что $\dim \beta Y \leqq n$. Теорема доказана.

2. Через $F_n(X)$ обозначается множество всех несократимых слов группы $F(X)$ длины $\leqq n$. Множество $F_n(X)$, как известно, замкнуто в $F(X)$ и является непрерывным образом (при отображении p_n) n-ой степени пространства $X^* = X \cup \{e\} \cup X^{-1}$. При этом X^{-1} есть экземпляр пространства X, элементы которого условно снабжены степенью -1, а X^* есть дискретная сумма пространств X, X^{-1} и $\{e\}$. Точке $y = (x_1, \ldots, x_n) \in (X^*)^n$ отображение p_n в соответствие ставит слово $x_1 \cdot \cdots \cdot x_n$ (в котором надо произвести надлежащие сокращения). Если X — бикомпакт, то отображение p_n, очевидно, совершенно.

Ниже через I обозначается отрезок $[0, 1]$.

Лемма 3. Пусть X — бикомпакт и дано отображение $\varphi \colon X \times I \to G$ подпроизведения $X \times I$ произведения $F(X) \times I$ в топологическую группу G. Через Φ_t обозначим однозначно определенный отображением $\varphi_t = \varphi / X \times \{t\}$ непрерывный гомоморфизм группы $F(X) \times \{t\}$ в группу G. Тогда отображение $\Phi \colon F(X) \times I \to G$, равное Φ_t на $F(X) \times \{t\}$, $t \in I$, непрерывно на каждом подпроизведении $F_n(X) \times I$, $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $\bar{x} \in F_n(X)$. Фиксируем какую-нибудь окрестность O точки $g_0 = \Phi(\bar{x}, \theta)$, $\theta \in I$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (X^*)^n$ и $p_n y = \bar{x}$. Ясно, что $p_1 y_1 \cdot \cdots \cdot p_1 y_n = \bar{x}$. Поэтому у точек $g_i = \Phi_\theta(p_1 y_i, \theta)$ существуют такие окрестности O_i, что $O_1 \cdot \cdots \cdot O_n \subset O$. Но тогда (в силу непрерывности φ) существуют такие окрестности V_{y_i} точек y_i и U_y числа θ, что $\Phi(p_1 V_{y_i} \times U_y) \subset O_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для окрестности $V_y = V_{y_1} \times \cdots \times V_{y_n}$ точки y имеем $\Phi(p_n V_y \times U_y) = \Phi(p_1 V_{y_1} \cdot \cdots \cdot p_1 V_{y_n} \times U_y) \subset O_1 \cdot \cdots \cdot O_n \subset O$.

В силу совершенности отображения $\bar{p}_n = p_n \times id$, можно найти такие окрестности $O\bar{x}$ и O_θ, что $\bar{p}_n^{-1}(O\bar{x} \times O_\theta) \subset \cup \{V_y \times U_y \colon y \in p_n^{-1}\bar{x}\}$. Ясно, что $\Phi(O\bar{x} \times O_\theta) \subset O$. Непрерывность отображения Φ на $F_n(X) \times I$ установлена. Лемма доказана.

Лемма 4. Если свободные топологические группы бикомпактов X и Y изоморфны, то для любой топологической группы G изоморфны группы $[X, G]$ и $[Y, G]$ классов гомотопически эквивалентных отображений X и Y в G.

Доказательство. Будем для удобства считать, что $F(X) = F(Y)$. Тогда существуют такие m и n, что $Y \subset F_n(X)$ и $X \subset F_m(Y)$. Каждое отображение $f \colon X \to G$ в группу G однозначно определяет непрерывный гомоморфизм $f_G \colon F(X) \to G$, а, следовательно, и отображение $\varphi(f) = f_G / Y$. Аналогично, каждое отображение $g \colon Y \to G$ однозначно определяет непрерывный гомоморфизм $g_G \colon F(Y) \to G$ и отображение $\psi(g) = g_G / X$. Легко видеть, что $\psi(\varphi(f)) = f$ и $\varphi(\psi(g)) = g$. Так как $\varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$ и $\varphi(f_1 \cdot f_2) = \varphi(f_1) \cdot \varphi(f_2)$, то φ и ψ являются взаимно обратными изоморфизмами групп отображений X и Y в G. По лемме 3, гомотопным отображениям $f_1, f_2 \colon X \to G$ и $g_1, g_2 \colon Y \to G$ соответствуют гомотопные отображения $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ и $\psi(g_1)$, $\psi(g_2)$. Отсюда следует, что отображение φ^*, ставящее в соответствие гомотопичскому классу отображения $f \colon X \to G$ гомотопический класс отображения $\varphi(f)$, является изоморфизмом группы $[X, G]$ на группу $[Y, G]$. Лемма доказана.

Так как, для счетной коммутативной группы Π пространства $K(\Pi, n)$ можно реализовать как пространства топологической группы [8], то (см. [9]) из леммы 4 вытекает

Теорема 2. Если свободные топологические группы бикомпактов X и Y изоморфны, то изоморфны и их когомологические группы $H^n(X; \Pi)$ и $H^n(Y; \Pi)$ для любой коммутативной счетной группы Π и $n=1, 2$.

Замечание 1. Леммы 3 и 4 без доказательства содержатся в одном из замечаний статьи [3].

Замечание 2. Теорема 2 верна и для любой коммутативной группы Π, а также и для свободных в смысле Граева групп (и любых Π). При этом можно считать, что $n=0, 1, 2 \ldots$.

Институт математики
Болгарской академии наук
София, Болгария

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
СССР

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский. ДАН СССР **252**, 1980, 4, 777. [2] Id. IV Тирасп. симп. общ. топол. 1979, 7. [3] М. И. Граев. Изв. АН СССР, сер. матем. **12**, 1948, 279. [4] Д. С. Павловский. ДАН СССР **253**, 1980, 1, 38. [5] Б. А. Пасынков. Ibid. **254**, 1980, 6, 1332. [6] Id. Fund. Math. **60**, 1967, 285. [7] Е. С. Щепин. УМН **31**, 1976, 5, 191. [8] J. Milnor. Ann. Math. Ser. 2. **65**, 1957, 2, 357. [9] P. J. Huber. Math. Ann. **144**, 1961, 73.