О ВЕСЕ БИКОМПАКТОВ С РЕШЕТКАМИ ИЗ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

ВЕСКО М. ВЫЛОВ

Доказывается, что если $\exp X$ и $\exp_n X$ — непрерывные образы некоторых „хороших" пространств (например, абсолютных окрестностных ретрактов), то X — метризуемый бикомпакт. Приведенные здесь результаты являются обобщением результатов Шапиро [7, 8].

Настоящая работа содержит полные доказательства опубликованных раньше [2] результатов автора. Основная часть приведенных здесь результатов получена сочетанием методов, разработанных Шепиным [9] и Шапиро [7].

Через $\exp X$ обозначаем пространство замкнутых подмножеств данного пространства X в топологии Виеториса, а через $\exp_n X$ — n-ая симметрическую степень пространства X. Всюду далее τ, λ, μ означают бесконечные кардинальные числа, а τ^+ — непосредственно следующий за τ кардинал. Если псевдохарактер $\psi\chi(F, X)\leqq\tau$, мы будем говорить, что F является G_τ-подмножеством в X (напомним, что когда X — бикомпакт и F — его замкнутое подмножество, то $\psi\chi(F, X)=\chi(F, X)$). Тело произвольной системы $\mathscr{A}$ подмножеств множества X будем обозначать через $\bigcup\mathscr{A}$. Сокращение ANR (AR) означает абсолютный окрестностный ретракт в классе бикомпактов (абсолютный ретракт в классе бикомпактов).

Определение 1 [9]. *Внутренним произведением семейства непрерывных отображений* $\{f_\alpha : X\to Y_\alpha\}$, *где* X — *бикомпакт, называется отображение* X *в его фактор-пространство по разбиению, порожденному диагональным произведением* Δf_α. *Внутреннее произведение будем обозначать через* $\bigotimes_\alpha f_\alpha$, *а через* $\Phi(X)$ — *совокупность всех факторных отображений* X.

Определение 2 [9]. *Подсемейство* $\Psi\subset\Phi(X)$ *называется* τ-*решеткой, если выполнены следующие условия:*

P1. *Если семейство* $\{\varphi_\alpha\}\subset\Psi$ *таково, что для любого конечного набора* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ — *внутреннее произведение* $\bigotimes_{i=1}^k\varphi_{\alpha_i}\in\Psi$, *тогда и* $\bigotimes_\alpha\varphi_\alpha\in\Psi$.

P2. *Для любого отображения* $f\in\Phi(X)$ *существует такое* $\varphi\in\Psi$, *что* $\varphi<f$ (*т. е. равенство* $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$ *всегда влечет за собой равенство* $f(x_1)=f(x_2)$), *причем, если вес образа* $f(X)$ *не превосходит* τ, *то и вес образа* $\varphi(X)$ *тоже не превосходит* τ.

Решеткой называем семейство, являющееся τ-решеткой при любом $\tau\geqq\aleph_0$.

Лемма 1 [9]. *Каждая* τ-*решетка бикомпакта* X *является* τ'-*решеткой при любом* $\tau'>\tau$.

ПЛИСКА Български математически студии. Том 6, 1983, с. 63–74.

Лемма 2. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Тогда существует отображение φ из решетки, такое, что $\varphi^{-1}\varphi(F)=F$ и вес пространства $\varphi(X)$ не превосходит $\tau\lambda$.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — система мощности λ из открытых в X множеств, которая является локальной базой множества F в X. Так как X нормально, то существуют непрерывные вещественные функции $f_\alpha : X \to [0, 1]$, для которых $f_\alpha(X \setminus U_\alpha)=1$ и $f_\alpha(F)=0$ при любом $\alpha \in A$. Пусть $f=\otimes f_\alpha$. Так как $f(X)\subset \Pi\{f_\alpha(X):\alpha \in A\}$, то $wf(X)\leqq w\Pi\{f_\alpha(X):\alpha\in A\}\leqq\lambda$. Если x точка из F и y точка из $X\setminus F$, то тогда y не принадлежит U_{α_0} для некоторого $\alpha_0 \in A$, следовательно, $f_{\alpha_0}(x)\neq f_{\alpha_0}(y)$, и тем более $f(x)\neq f(y)$, т. е. $f^{-1}f(F)=F$. В силу леммы 1 решетка Ψ является $\tau\lambda$-решеткой, а в силу Р2 существует отображение φ из Ψ, такое, что $\varphi<f$ и $w\varphi(X)\leqq\tau\lambda$. Из $\varphi<f$ и $f^{-1}f(F)=F$ следует, что $\varphi^{-1}\varphi(F)=F$.

Теорема 1. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и $\mathscr{A}$ — система из замкнутых G_λ-подмножеств X. Тогда существуют подсистема $\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$ мощности $|\mathscr{B}|\leqq\tau\lambda$ и отображение φ из решетки, такие, что $w\varphi(X)\leqq\tau\lambda$ и $\varphi^{-1}\varphi[\bigcup\mathscr{B}]=[\bigcup\mathscr{B}]=[\bigcup\mathscr{A}]$.*

Доказательство. Согласно лемме 2, для любого множества $K\in\mathscr{A}$ существует отображение φ_K из решетки Ψ, такое, что $\varphi_K^{-1}\varphi_K(K)=K$ и $w\varphi_K(X)\leqq\tau\lambda$. По индукции строим подсистемы $\mathscr{A}_n\subset\mathscr{A}$ и отображения $\varphi_n\in\Psi$, такие, что:

1) $\varphi_1>\varphi_2>\cdots\varphi_n>\varphi_{n+1}>\cdots$,

2) $|\mathscr{A}_n|\leqq\tau\lambda$, $w\varphi_n(X)\leqq\tau\lambda$,

3) $\varphi_{n+1}<\otimes\{\varphi_K : K\in\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i\}\otimes\varphi_n$,

4) $[\varphi_n(\bigcup\mathscr{A}_n)]=[\varphi_n(\bigcup\mathscr{A})]$.

Пусть $\varphi_1\in\Psi$ такое, что $w\varphi_1(X)\leqq\tau\lambda$ (такое φ_1 существует в силу Р2). Выберем подмножество $A_1\subset\bigcup\mathscr{A}$, для которого $|A_1|\leqq\tau\lambda$ и $\varphi_1(A_1)$ плотно в $\varphi_1(\bigcup\mathscr{A})$. Существует тогда такая подсистема $\mathscr{A}_1\subset\mathscr{A}$ мощности $|\mathscr{A}_1|\leqq\tau\lambda$, что $A_1\subset\bigcup\mathscr{A}_1$. Пусть построены системы $\mathscr{A}_i$ и отображения φ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющие 1) — 4). Так как $|\bigcup\mathscr{A}_i|\leqq\tau\lambda$, $w\varphi_n(X)\leqq\tau\lambda$ и $w\varphi_K(X)\leqq\tau\lambda$ для $K\in\mathscr{A}$, если $\varphi'_{n+1}=\varphi_n\otimes\{\varphi_K : K\in\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i\}$, то $w\varphi'_{n+1}(X)\leqq\tau\lambda$. В силу леммы 1 и Р2 существует отображение $\varphi_{n+1}\in\Psi$, такое, что $\varphi_{n+1}<\varphi'_{n+1}$ и $w\varphi_{n+1}(X)\leqq\tau\lambda$. Теперь выберем множество $A_{n+1}\subset\bigcup\mathscr{A}$ и систему $\mathscr{A}_{n+1}\subset\mathscr{A}$, так что $|A_{n+1}|\leqq\tau\lambda$; $\varphi_{n+1}(A_{n+1})$ плотное в $\varphi_{n+1}(\bigcup\mathscr{A})$, $A_{n+1}\subset\bigcup\mathscr{A}_{n+1}$ и $|\mathscr{A}_{n+1},|\leqq\tau\lambda$. Тогда $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ удовлетворяют 1) — 4).

Пусть $\varphi=\otimes_{n=1}^{\infty}\varphi_n$ и $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n$. В силу 2) имеем, что $w\varphi(X)\leqq\tau\lambda$ и $|\mathscr{B}|\leqq\tau\lambda$, а в силу 1) и Р1 — $\varphi\in\Psi$. Так как $\varphi_{n+k}<\varphi_n$ и $\varphi<\varphi_n$, $n=1, \ldots$; $k=1, 2, \ldots$, то отображения $\pi(n+k, n)=\varphi_n\circ\varphi_{n+k}^{-1}$ и $\pi_n=\varphi_n\circ\varphi^{-1}$ однозначны, а из открытости отображений φ и φ_n, $n=1, 2, \ldots$ следует непрерывность отображений $\pi(n+k, n)$ и π_n. Очевидно тогда, что $\varphi(X)=\varprojlim\{\varphi_n(X);\ \pi(m, n), n<m\}$

Пусть $\varphi(x)\in\varphi(\bigcup\mathscr{A})$, где $x\in\bigcup\mathscr{A}$ и $O\varphi(x)$ — произвольная окрестность точки $\varphi(x)$ в $\varphi(X)$. В силу определения топологии предельного пространства $\varphi(X)$, можно считать, что $O\varphi(x)=\pi_{n_0}^{-1}\pi_{n_0}(O\varphi(x))$ для некоторого n_0. Но $\pi_{n_0}(\varphi(x))=\varphi_{n_0}(\varphi^{-1}\varphi(x))=\varphi_{n_0}(x)\in\pi_{n_0}(O\varphi(x))$ — окрестность точки $\varphi_{n_0}(x)$ в $\varphi_{n_0}(X)$. Из 4) следует, что $\pi_{n_0}(O\varphi(x))\cap\varphi_{n_0}(\bigcup\mathscr{A}_{n_0})\neq\varnothing$.

Пусть $\varphi_{n_0}(y) \in \pi_{n_0}(O\varphi(x)) \cap \varphi_{n_0}(\bigcup \mathscr{A}_{n_0})$, где $y \in \bigcup \mathscr{A}_{n_0}$. Тогда $\varphi(y) \in \varphi(\varphi_{n_0}^{-1}\varphi_{n_0}(y)) = \pi_{n_0}^{-1}(\varphi_{n_0}(y)) \subset O\varphi(x)$, т. е. $O\varphi(x) \cap \varphi(\bigcup \mathscr{B}) \neq \varnothing$. Следовательно, $\varphi(\bigcup \mathscr{B})$, плотно в $\varphi(\bigcup \mathscr{A})$. Если $x \in \bigcup \mathscr{B}$, то существует система $\mathscr{A}_{n_1}$ и элемент $K \in \mathscr{A}_{n_1}$, для которых $x \in K$. Тогда из $\varphi < \varphi_{n_1+1} < \varphi_K$ следует, что $\varphi^{-1}\varphi(x) \subset \varphi_K^{-1}\varphi_K(K) = K \subset \bigcup A_{n_1} \subset \bigcup \mathscr{B}$, т. е. $\varphi^{-1}\varphi(\bigcup \mathscr{B}) = \bigcup \mathscr{B}$. Пусть $x \in \bigcup \mathscr{A}$ и Ox — окрестность точки x в X. Тогда $\varphi(Ox)$ — окрестность $\varphi(x)$ в $\varphi(X)$, и из плотности $\varphi(\bigcup \mathscr{B})$ в $\varphi(\bigcup \mathscr{A})$ следует, что $\varphi(Ox) \cap \varphi(\bigcup \mathscr{B}) \neq \varnothing$. Но $\varphi^{-1}\varphi(\bigcup \mathscr{B}) = \bigcup \mathscr{B}$. Следовательно, $Ox \cap (\bigcup \mathscr{B}) \neq \varnothing$, т. е. $[\bigcup \mathscr{A}] = [\bigcup \mathscr{B}]$.

Замечание 1. Если находимся в условии теоремы 1 и $\chi(K, X) < \lambda$ при любом $K \in \mathscr{A}$, где $\chi(K, X)$ — характер K в X, а λ — несчетный регулярный кардинал и $\tau < \lambda$, то существуют подсистема $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ мощности $|\mathscr{B}| < \lambda$ и отображение φ из решетки, такие, что $w\varphi(X) < \lambda$ и $\varphi^{-1}\varphi[\bigcup \mathscr{B}] = [\bigcup \mathscr{B}] = [\bigcup \mathscr{A}]$.

Следствие 1. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Тогда число Суслина $c(F) \leq \tau\lambda$.*

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, покажем, что если U — открытое множество в F, то U является объединением замкнутых $G_{\tau\lambda}$-подмножеств X. Действительно, пусть $\tilde{U}$ — открытое множество в X, такое, что $U = \tilde{U} \cap F$, а $f: X \to [0,1]$ — непрерывная вещественная функция, для которой $f(X \setminus \tilde{U}) = 1$ и $f(x) = 0$, если $x \in U$. В силу леммы 2, существует отображение φ_1 со свойством: $\varphi_1^{-1}\varphi_1(F) = F$ и $w\varphi_1(X) \leq \tau\lambda$, а в силу леммы 1 и P2 — существует отображение φ, такое, что $\varphi < \varphi_1 \otimes f$ и $w\varphi(X) \leq \tau\lambda$. Так как $\varphi < \varphi_1 \otimes f$, $\varphi_1^{-1}\varphi_1(F) = F$ и $f(X \setminus \tilde{U}) = 1$, то $x \in \varphi^{-1}\varphi(x) \subset U$. Этим мы показали, что U является объединением замкнутых $G_{\tau\lambda}$-множеств.

Пусть теперь $c(F) \geq (\tau\lambda)^+$ и $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — дизъюнктная система из открытых в F множеств, которая имеет мощность $(\tau\lambda)^+$. В силу сказанного выше через $\mathscr{A}$ обозначаем систему замкнутых $G_{\tau\lambda}$-множеств, телом которой является $\bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. По теореме 1, существует подсистема $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ мощности $|\mathscr{B}| \leq \tau\lambda$, тело которой плотно в $\bigcup \mathscr{A} = \bigcup \gamma$. Так как γ — дизъюнктная система мощности $(\tau\lambda)^+$, а $|\mathscr{B}| \leq \tau\lambda$, существует $\alpha_0 \in A$, такое, что $U_{\alpha_0} \cap (\bigcup \mathscr{B}) = \varnothing$, а это противоречит плотности множества $\bigcup \mathscr{B}$ в $\bigcup \mathscr{A}$. Следовательно, $c(F) \leq \tau\lambda$.

Лемма 3. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и $H \subset F$ — такие замкнутые в X множества, что $\chi(F, X) \leq \lambda$ и $\pi\chi(H, F) \leq \mu$. Тогда существуют замкнутое множество $P \subset H$ и отображение φ из решетки, что $\varphi^{-1}\varphi(P) = P$ и $w\varphi(X) \leq \tau\lambda\mu$.*

Доказательство. Пусть $\{\tilde{U}_\alpha : \alpha < \omega(\mu)\}$ — такая система из открытых в X множеств, что $\{\tilde{U}_\alpha \cap F : \alpha < \omega(\mu)\}$ является локальной π-базой множества H в F. Пусть $f_\alpha : X \to [0, 1]$ — непрерывные вещественные функции со свойством: $f_\alpha(X \setminus \tilde{U}_\alpha) = 1$, $f_\alpha(x_\alpha) = 0$, где $x_\alpha \in \tilde{U}_\alpha \cap F$.

Если $U_\alpha = f_\alpha^{-1}[0, 1)$, то очевидно, что $f_\alpha^{-1}f_\alpha(U_\alpha) = U_\alpha$ и что система $\gamma = \{U_\alpha \cap F : \alpha < \omega(\mu)\}$ — локальная π-база множества H в F. По лемме 2, существует отображение φ_1 такое, что: $\varphi_1^{-1}\varphi_1(F) = F$ и $w\varphi_1(X) \leq \tau\lambda$. Так как $w(\otimes f_\alpha)(X) \leq \mu$, согласно лемме 1 и P2, существует отображение φ из решетки, такое, что $\varphi < \varphi_1 \otimes (\otimes f_\alpha)$ и $w\varphi(X) \leq \tau\lambda\mu$. Из $\varphi < \varphi_1$ и $\varphi < f_\alpha$ при любом α следует, что $\varphi^{-1}\varphi(F) = F$ и $\varphi^{-1}\varphi(U_\alpha) = U_\alpha$. Если успеем убедиться, что существует точка $z \in \varphi(H)$, для которой $\varphi^{-1}(z) \subset H$, то доказательство будет окончено. Допустим противное. Тогда для каждой точки $z \in \varphi(H)$ существует точка $x(z) \in \varphi^{-1}(z) \setminus H$ и ее замкнутая окрестность $Ox(z)$, непересекающая H. В силу открытости отображения φ, для каждой точки $z \in \varphi(H)$ существует такая окрестность Oz, что $\varphi^{-1}(z') \cap Ox(z) \neq \emptyset$, когда $z' \in Oz$.

Пусть $H(z) = \varphi^{-1}(z) \cap H$ и $OH(z)$ — окрестность $H(z)$ в X, такая, что: $OH(z) \cap Ox(z) = \emptyset$ и $\varphi(OH(z)) \subset Oz$. Из покрытия $\{OH(z) : z \in \varphi(H)\}$ выберем конечное покрытие $\{OH(z_i) : i = 1, \dots, k\}$ и положим $W(z_i) = OH(z_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} Ox(z_j)$. Очевидно $H \subset \bigcup_{i=1}^{k} W(z_i)$. Тогда существует $\alpha_0 < \omega(\mu)$ такое, что $U_{\alpha_0} \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{k} W(z_i)$ (γ является π-базой H в F). Если $x \in U_{\alpha_0} \cap F$, то $x \in W(z_{i_0})$ при некотором i_0 и тогда $\varphi(x) \in \varphi\ (W(z_{i_0})) \subset \varphi(OH(z_{i_0})) \subset Oz_{i_0}$. Следовательно, $\varphi^{-1}\varphi(x) \cap Ox(z_{i_0}) \neq \emptyset$. С другой стороны, $\varphi^{-1}\varphi(x) \subset U_{\alpha_0} \cap F \subset \bigcup_{i=1}^{k} W(z_i)$, а $Ox(z_{i_0}) \cap (\bigcup_{i=1}^{k} W(z_i)) = \emptyset$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Пусть бикомпакт Y является непрерывным образом F и $M \subset Y$. Если $\pi\chi(y, Y) \leq \mu$ для всех $y \in M$, то $w[M] \leq \tau\lambda\mu$.*

Доказательство. Пусть $f : F \to Y$ — непрерывное отображение «на» и $y \in M$. Если $\{U_\alpha : \alpha < \omega(\mu)\}$ является локальной π-базой точки y в Y, то система $\{f^{-1}(U_\alpha) : \alpha < \omega(\mu)\}$ является локальной π-базой $f^{-1}(y)$ в F. Следовательно, $\pi X(f^{-1}(y), F) \leq \mu$, и по лемме 3 существует замкнутое $G_{\tau\lambda\mu}$-подмножество F_y в пространстве $f^{-1}(y)$.

Рассматриваем систему $\mathscr{A} = \{F_y : y \in M\}$. Согласно теореме 1, существуют подсистема $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ и открытое отображение φ из решетки, такие, что:

1) $|\mathscr{B}| \leq \tau\lambda\mu$, $\quad w\varphi(X) \leq \tau\lambda\mu$,

2) $[\bigcup \mathscr{B}] = [\bigcup \mathscr{A}] \subset F$, $\varphi^{-1}\varphi(F_y) = F_y$ для всех $y \in M$ и $\varphi^{-1}\varphi[\bigcup \mathscr{B}] = [\bigcup \mathscr{B}]$.

Рассматриваем многозначное отображение $h : \varphi[\bigcup \mathscr{B}] \to \exp Y$, где $h(z) = f(\varphi^{-1}(z))$. Покажем, что отображение h полунепрерывно снизу, т. е. если $z_0 \in \varphi[\bigcup \mathscr{B}]$, а U — открытое в Y множество и $h(z_0) \cap U \neq \emptyset$, то существует такая окрестность Oz_0 точки z_0 в $\varphi[\bigcup \mathscr{B}]$, что $h(z) \cap U \neq \emptyset$ для всех $z \in Oz_0$. В самом деле, пусть $y_0 \in h(z_0) \cap U$ и $f(x_0) = y_0$ для некоторого $x_0 \in \varphi^{-1}(z_0)$. Из непрерывности отображений f следует, что $f(V) \subset U$ для некоторой окрестности V точки x_0. Тогда $\varphi(V)$ — окрестность z_0 в $\varphi(X)$. Если $z \in \varphi(V) \cap \varphi[\bigcup \mathscr{B}]$, то $\varphi^{-1}(z) \cap V \neq \emptyset$ и тем более $h(z) \cap U \neq \emptyset$. Этим доказано, что h полунепрерывно снизу.

Пусть $z \in \varphi(\bigcup \mathscr{B})$, тогда $z \in \varphi(F_y)$ для некоторого $F_y \in \mathscr{B}$ и $\varphi^{-1}(z) \subset \varphi^{-1}\varphi(F_y) = F_y \subset f^{-1}(y)$, т. е. $h(z) = y$. Следовательно, $h/\varphi(\bigcup \mathscr{B}) : \varphi(\bigcup \mathscr{B}) \to \exp Y$ является однозначним отображением. Пусть $z \in \varphi[\bigcup \mathscr{B}] = [\varphi(\bigcup \mathscr{B})]$ и $y_1, y_2 \in h(z)$, $y_1 \neq y_2$. Если Oy_1, Oy_2 — непересекающиеся окрестности точек y_1, y_2, то в силу полунепрерывности снизу отображений h существует окрестность Oz, такая, что $h(z') \cap Oy_i \neq \emptyset$ $i = 1, 2$ для всех $z' \in Oz$. Но $Oz \cap \varphi(\bigcup \mathscr{B}) \neq \emptyset$ и, если $z_1 \in O_z \cap \varphi(\bigcup \mathscr{B})$, то $h(z_1) \cap Oy_i \neq \emptyset$ $i = 1, 2$, что противоречит однозначности отображения $h/\varphi(\bigcup \mathscr{B})$. Следовательно, отображение h однозначно и непрерывно. Так как $f(\bigcup \mathscr{A}) = M$ и $[\bigcup \mathscr{A}] = [\bigcup \mathscr{B}]$, то $[M] \subset f[\bigcup \mathscr{B}] = h(\varphi[\bigcup \mathscr{B}])$. Отсюда $w[M] \leq w\varphi[\bigcup \mathscr{B}] \leq w\varphi(X) \leq \tau\lambda\mu$.

Замечание 2. Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Пусть бикомпакт Y является непрерывным образом F и $M \subset Y$. Если μ — несчетное регулярное число, такое, что $\tau\lambda < \mu$ и $\pi\chi(y, Y) < \mu$ для всех $y \in M$, то $w[M] < \mu$.

Замечание 2 доказывается как теорема 2 при помощи замечания 1.

Следствие 2. *Пусть бикомпакт X имеет решетку из открытых отображений, F — замкнутое C_δ-подмножество X. Если бакомпакт Y является непрерывным образом F, то $wY = \pi wY = \chi(Y) = \pi\chi(Y)$.*

Доказательство. Если $\pi\chi(Y) = \tau < w(Y)$, то $\pi\chi(y, Y) \leq \tau$ для всех $y \in Y$ и, согласно теореме 2, имеем, что $w(Y) \leq \tau < w(Y)$. Следовательно, $\pi\chi(Y) = w(Y)$, что, вместе с неравенствами $\pi\chi(Y) \leq \pi w(Y) \leq w(Y)$ и $\pi\chi(Y) \leq \chi(Y) \leq w(Y)$, доказывает следствие 2.

Лемма 4. *Пусть бикомпакт X является пределом обратного спектра $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha < \beta < \omega(\tau)\}$ и F — замкнутое G_λ-подмножество X, где τ — несчетное регулярное число и $\lambda < \tau$. Тогда существует $\alpha_0 < \omega(\tau)$, такое, что $\pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}(F) = F$.*

Частный случай этой леммы, когда $\tau = \aleph_2$, рассмотрен в [8]. В общем случае доказательство то же самое.

Лемма 5 [8]. *Пусть X, Y, Z — бикомпакты, $f: Y \to Z$, $g: Y \to X$ — непрерывные отображения «на». Если $wX \leq \tau$, то существуют точка $x_0 \in X$ и такое замкнутое подмножество $F \subset g^{-1}(x_0)$, что $\chi(f(F), Z) \leq \tau$.*

Лемма 6 [1]. *Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение бикомпактов и $\{F_\alpha\}$ — убывающая, вполне упорядоченная по отношению включения последовательность непустых замкнутых подмножеств X. Тогда $f(\bigcap F_\alpha) = \bigcap f(F_\alpha)$.*

Лемма 7. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Пусть $f: F \to Y$ — непрерывное отображение на бикомпакт Y, имеющий несчетный регулярный вес $w(Y) = \mu > \tau\lambda$. Если Y является пределом непрерывного спектра $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha < \beta < \omega(\mu)\}$, где $w(Y_\alpha) < \mu$, то для каждого α_0 и каждой точки $y_{\alpha_0} \in Y_{\alpha_0}$ существуют отображение φ из решетки, ординал $\beta_1 < \omega(\mu)$ и точки $x \in F$, $y(\beta_1) \in Y_{\beta_1}$ такие, что: $\pi_{\beta_1}^{-1}(y(\beta_1)) = f(\varphi^{-1}\varphi(x))$, $\alpha_0 < \beta_1$, $\pi_{\alpha_0}^{\beta_1}(y(\beta_1)) = y_{\alpha_0}$ и $w\varphi(X) < \mu$.*

Доказательство. По индукции построим: $\{H_k\}_{k=1}^\infty$, $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ — системы замкнутых подмножеств F; отображения $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ из решетки Ψ; порядковые числа $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$; точки $y(\alpha_k) \in Y_{\alpha_k}$ и $z_k \in \varphi_k(X)$, такие, что:

1) $\varphi_1 > \varphi_2 > \cdots > \varphi_k > \cdots$; $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < \ldots$; $w\varphi_k(X) < \mu$,

2) $\pi_{\alpha_k}^{-1}(y(\alpha_k)) \subset f(H_k)$; $\pi_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}(y(\alpha_{k+1})) = y(\alpha_k)$; $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_k}(y(\alpha_k)) = y_{\alpha_0}$,

3) $H_k = \varphi_k^{-1}(z_k)$, $A_k = H_k \cap f^{-1}\pi_{\alpha_k}^{-1}(y(a_k))$, $H_{k+1} \subset A_k$.

Так как $w(Y_{\alpha_0}) = \mu_{\alpha_0} < \mu$, то $\chi(f^{-1}\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}), F) \leq \mu_{\alpha_0}$ и из $\chi(F, Y) \leq \lambda$ следует, что $\chi(f^{-1}\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}), X) \leq \mu_{\alpha_0}\lambda$. В силу леммы 2, существует отображение $\varphi_1 \in \Psi$, такое, что $f^{-1}\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}) = \varphi_1^{-1}\varphi_1(f^{-1}\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}))$ и $w\varphi_1(X) \leq \tau \cdot \mu_{\alpha_0} \cdot \lambda < \mu$. По лемме 5, существуют точка $z_1 \in \varphi_1(f^{-1}\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}))$ и такое замкнутое множество $F_1 \subset \varphi_1^{-1}(z_1) = H_1$, что $\chi(f(F_1), \pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0})) \leq \tau\lambda\mu_{\alpha_0}$. Тогда $\chi(f(F_1), Y) \leq \chi(f(F_1), \pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}))\chi(\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0}), Y) < \mu$. Из леммы 4 следует, что $f(F_1) = \pi_{\alpha_1}^{-1}\pi_{\alpha_1}(f(F_1))$ для некоторого $\alpha_1 > \alpha_0$. Пусть $y(\alpha_1) \in \pi_{\alpha_1}(f(F_1))$. Очевидно, что $\pi_{\alpha_1}^{-1}(y(\alpha_1)) \subset f(F_1)$

$\subset f(H_1)\subset\pi_{\alpha_0}^{-1}(y_{\alpha_0})$, т. е. $\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}(y(\alpha_1))=y_{\alpha_0}$. Пусть $A_1=H_1\cap f^{-1}\pi_{\alpha_1}^{-1}(y(\alpha_1))$. A_1 непусто в силу $\pi_{\alpha_1}^{-1}(y(\alpha_1))\subset f(H_1)$.

Предположим, что для всех $k=1, 2, \ldots, n$ построены системы $\{H_k\}_{k=1}^n$, $\{A_k\}_{k=1}^n$, отображения $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ и точки $\{y(\alpha_k)\}_{k=1}^n$, $\{z_k\}_{k=1}^n$, для которых выполнены условия 1)—3). Так как $\chi(H_n, X)\leqq w\varphi_n(X)\leqq\mu_{\alpha_n}\tau\lambda$ и $\chi(f^{-1}\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)), X)\leqq\chi(f^{-1}\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)), F)\,\chi(F, X)\leqq\mu_{\alpha_n}\lambda$, то $\chi(A_n, X)\leq\chi(H_n, X)\,\chi(f^{-1}\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)), X)\leqq\mu_{\alpha_n}\tau\lambda$. В силу леммы 2, существует $\tilde\varphi_{n+1}\in\Psi$, такое, что $w\tilde\varphi_{n+1}(X)\leqq\mu_{\alpha_n}\tau\lambda$ и $\tilde\varphi_{n+1}^{-1}\tilde\varphi_{n+1}(A_n)=A_n$. Пусть $g=\tilde\varphi_{n+1}\otimes\varphi_n$. Очевидно, что $w\,g(X)\leqq w\varphi_n(X)\,w\tilde\varphi_{n+1}(X)\leqq\tau\lambda\mu_{\alpha_n}$. В силу P2 и леммы 1, существует $\varphi_{n+1}\in\Psi$, такое, что $\varphi_{n+1}<g<\varphi_n$ и $w\varphi_{n+1}(X)\leqq\tau\lambda\mu_{\alpha_n}$. Тогда из $\varphi_{n+1}<\tilde\varphi_{n+1}$ и $\tilde\varphi_{n+1}^{-1}\tilde\varphi_{n+1}(A_n)=A_n$ следует, что $\varphi_{n+1}^{-1}\varphi_{n+1}(A_n)=A_n$, а из $\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n))\subset f(H_n)$ и $A_n=H_n\cap f^{-1}\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n))$ — что $f(A_n)=\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n))$. Отсюда по лемме 5 существуют точка $z_{n+1}\in\varphi_{n+1}(A_n)$ и такое замкнутое множество $F_{n+1}\subset\varphi_{n+1}^{-1}(z_{n+1})=H_{n+1}$, что $\chi(f(F_{n+1}), \pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)))\leqq\mu_{\alpha_n}\tau\lambda<\mu$. Тогда $\chi(f(F_{n+1}), Y)\leqq\chi(f(F_{n+1}), \pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)))\chi(\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n)), Y)<\mu$ и, в силу леммы 4, существует $\alpha_{n+1}>\alpha_n$, такое, что $\pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}\pi_{\alpha_{n+1}}(f(F_{n+1}))=f(F_{n+1})$.

Пусть $y(\alpha_{n+1})\in\pi_{\alpha_{n+1}}(f(F_{n+1}))$. Очевидно, что $\pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}(y(\alpha_{n+1}))\subset f(F_{n+1})\subset f(H_{n+1})\subset\pi_{\alpha_n}^{-1}(y(\alpha_n))$ и поэтому $\pi_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}(y(\alpha_{n+1}))=y(\alpha_n)$. Полагая $A_{n+1}=H_{n+1}\cap f^{-1}\pi_{\alpha_{n+1}}^{-1}(y(\alpha_{n+1}))$, мы заканчиваем индукцию.

Пусть $\beta_1=\sup\alpha_k$ и $\varphi=\bigotimes_{k=1}^{\infty}\varphi_k$. Так как β_1 — предельное порядковое число и спектр $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\gamma;\ \alpha<\gamma<\omega(\mu)\}$ непрерывен, то $Y_{\beta_1}=\varprojlim\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\gamma;\ \alpha<\gamma<\beta_1\}$. Отсюда и из конфинальности множества $\{\alpha_k: k=1, 2, \ldots\}$ в отрезке $(0, \beta_1)$ следует, что $Y_{\beta_1}=\varprojlim\{Y_{\alpha_k}, \pi_{\alpha_n}^{\alpha_m};\ n<m\}$. Поэтому нить $\{y(\alpha_k)\}_{k=1}^{\infty}$ определяет единственную точку $y(\beta_1)\in Y_{\beta_1}$ и $\pi_{\alpha_0}^{\beta_1}(y(\beta_1))=\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}(\pi_{\alpha_1}^{\beta}(y(\beta_1)))=\pi_{\alpha_0}^{\alpha_1}(y(\alpha_1))=y_{\alpha_0}$. Из условий 1) и P1 следует, что $\varphi\in\Psi$ и $w\varphi(X)\leqq w\Pi\{\varphi_k(X): k=1, 2, \ldots\}<\mu$.

Так как $H_1\supset A_1\supset H_2\supset A_2\supset\cdots$, то $\bigcap H_k=\bigcap A_k$ и по лемме 6 $f(\bigcap H_k)=f(\bigcap A_k)=\bigcap f(A_k)=\bigcap\pi_{\alpha_k}^{-1}(y(\alpha_k))=\pi_{\beta_1}^{-1}(y(\beta_1))$. Пусть $x_1, x_2\in\bigcap H_k$ и $x_1\neq x_2$. Если $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$, то из $\varphi=\bigotimes\varphi_k$ следует $\varphi_{k_0}(x_1)\neq\varphi_{k_0}(x_2)$ для некоторого k_0, а это противоречит тому, что $\varphi_{k_0}(H_{k_0})=z_{k_0}$. Следовательно, $\varphi(\bigcap H_k)=\varphi(\bigcap A_k)=z$ — одноточковое множество. С другой стороны, если $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)$, где $x_1\in\bigcap H_k$, а $x_2\,\bar\in\,\bigcap H_k$, то $x_2\,\bar\in\,H_{k_0}$ для некоторого k_0, и из $\varphi<\varphi_{k_0}$ следует, что $\varphi_{k_0}(x_1)=\varphi_{k_0}(x_2)$. Но $\varphi_{k_0}^{-1}\varphi_{k_0}(H_{k_0})=H_{k_0}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(z)=\bigcap H_k$ и $\pi_{\beta_1}(y(\beta_1))=f(\varphi^{-1}(z))=f(\varphi^{-1}\varphi(x))$, где $x\in\varphi^{-1}(z)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. Если находимся в условиях леммы 7 и $f=\mathrm{id}: F\to F$, то для любой точки $y\in F$ и любого порядкого числа $\alpha_0<\omega(\mu)$ существуют отображение φ из решетки и $\beta_0>\alpha_0$, такие, что: $w\varphi(X)<\mu$ и $\varphi^{-1}\varphi(y)=\pi_{\beta_0}^{-1}\pi_{\beta_0}(y)$.

Л е м м а 8 [7]. *Пусть $F=\{x_i\}_{i=1}^k$ — конечное подмножество пространства X, причем $\pi\chi(x_i, X)\leqq\tau$ для любого $i\leqq k$. Тогда $\pi\chi(\widehat{F}, \exp X)\leqq\tau$. Через $\widehat{F}$ здесь обозначено множество F, рассматриваемое как точка пространства* $\exp X$.

Замечание 4. Если находимся в условии леммы 8 и $k \leqq n$, то [illegible] $\widehat{?}$, $\exp_n X) \leqq \tau$.

Лемма 9. *Пусть X — бикомпакт и $w(X) \geqq \tau^+$. Пусть $\exp X (\exp_n X)$ является непрерывным образом некоторого замкнутого G_τ-подмножества бикомпакта с τ-решеткой из открытых отображений. Тогда в X существует открытое подмножество U, такое, что $\pi\chi(x, X) \geqq \tau^+$ для всех $x \in U$.*

Доказательство. Если множество $M = \{x \in X : \pi\chi(x, X) \leqq \tau\}$ плотно в X, то множество $\tilde{M}$, состоящее из конечных подмножеств (из множеств, имеющих не более чем n точек) множества M, является плотным в $\exp X (\exp_n X)$. Тогда по лемме 8 (замечанию 4) $\pi\chi(\widehat{F}, \exp X (\exp X) \leqq \tau$ $(\pi\chi(\widehat{F}, \exp_n X) \leqq \tau)$ для всех $\widehat{F} \in \tilde{M}$. Применяя теорему 2, получаем, что $w \exp X \leqq \tau (w \exp_n X \leqq \tau)$, а это противоречит равенству $w \exp X = w \exp_n X = w(X)$. Следовательно, существует такое открытое $U \subset X$, что $\pi\chi(x, X) \geqq \tau^+$ для всех $x \in U$.

Лемма 10 [7]. *Пусть $X = \underleftarrow{\lim} \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha < \beta < \omega(\tau^{++})\}$ — предел непрерывного спектра с проекциями «на». Пусть $c(X) \geqq \tau^+$. Тогда существует $\alpha < \omega(\tau^{++})$, такое, что $c(X_\alpha) \geqq \tau^+$.*

Лемма 11 [7]. *Пусть X, Y — бикомпакты, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение «на» и $\pi\chi(x, X) > \pi w(Y)$ для любой точки $x \in X$. Если F — замкнутое подмножество Y и $c(F) \geqq \tau^+$, то $c((\exp f)^{-1}(\widehat{F})) \geqq \tau^+$.*

Лемма 12 [5, 6]. *Если X — бикомпакт, то $t(X) \leqq \overline{\pi\chi}(X)$ и $t(X) \leqq \overline{c}(X)$, где $t(X)$ — теснота X, $\overline{\pi\chi} X$ — наследственный π-характер X и $\overline{c}(X)$ — наследственное число Суслина пространства X.*

Лемма 13. *Пусть X — бикомпакт, F — замкнутое подмножество X, такое, что $c(F) \geqq \tau^+$. Тогда X непрерывно отображается на бикомпакт веса τ^+.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha : \alpha < \omega(\tau^+)\}$ — дизъюнктная система открытых в F множеств (такая система существует, иначе $c(F) \leqq \tau$) и $\tilde{U}_\alpha$ — открытые в X множества, такие, что $U_\alpha = \tilde{U} \cap F$. В силу нормальности X для любого α существует вещественная непрерывная функция $f_\alpha : X \to [0, 1]$, такая, что $f_\alpha(x_\alpha) = 0$, $f_\alpha(X \setminus \tilde{U}_\alpha) = 1$, где $x_\alpha \in U_\alpha$. Если $\tilde{W}_\alpha = f_\alpha^{-1}[0, 1]$, то очевидно, что $\tilde{W}_\alpha \subset \tilde{U}_\alpha$, $f_\alpha^{-1} f_\alpha(\tilde{W}_\alpha) = \tilde{W}_\alpha$ и $\tilde{W}_\alpha$ — открытое в X, а тогда $W_\alpha = \tilde{W}_\alpha \cap F$ — открытое в F и $W_\alpha \subset U_\alpha$. Пусть $f = \bigotimes f_\alpha$ и $Y = f(X)$. Очевидно $wY \leqq w \Pi f_\alpha(X) \leqq \tau^+$. Так как $f_\alpha^{-1} f_\alpha(\tilde{W}_\alpha) = W_\alpha$ и $W_\alpha = \tilde{W}_\alpha \cap F$, то $f_F^{-1} f_F(W_\alpha) = W_\alpha$, где $f_F = f|F : F \to f(F)$. Отсюда и в силу дизъюнктности системы $\{W_\alpha : \alpha < \omega(\tau^+)\}$ следует, что $\{f_F(W_\alpha) : \alpha < w(\tau^+)\}$ является дизъюнктной системой из открытых в $f(F)$ множеств, т. е. $cf(F) \geqq \tau^+$. Следовательно, имея в виду $wY \leqq \tau^+$, получаем, что $w(Y) = \tau^+$.

Теорема 3. *Пусть бикомпакт X имеет τ^+-решетку из открытых отображений со свойством: $c(\varphi^{-1}\varphi(x)) \leqq \mu$ для всех $x \in X$ и для всех φ из решетки. Пусть X_0 — замкнутое G_λ-подмножество X и $f : X \to \exp Y$ — непрерывное отображение «на», где Y — бикомпакт. Тогда $wY \leqq (\tau\lambda\mu)^+$.*

Доказательство. Допустим, что $wY \geqq (\tau\lambda\mu)^{++}$. В силу леммы 9, существует открытое множество $W \subset Y$, такое, что $\pi\chi(y, Y) \geqq (\tau\lambda\mu)^{++}$ для всех $y \in W$. Если $[V] \subset U$, $[U] \subset W$, где U, V — открытые в Y, то $\pi\chi(y, [V])$

$=\pi\chi([y, Y])\geqq(\tau\lambda\mu)^{++}$ для всех $y\in[V]$, т. е. $\pi\chi([V])\geqq(\tau\lambda\mu)^{++}$. По лемме 12 существует замкнутое подмножество $F\subset[V]$, такое, что $c(F)\geqq(\tau\lambda\mu)^{++}$. Из леммы 13 следует, что Y отображается на бикомпакт Z веса $(\tau\lambda\mu)^{++}$, и тогда $\exp Z$ является непрерывном образом $\exp Y$, т. е. не нарушая общности, можно считать, что $wY=(\tau\lambda\mu)^{++}$.

Итак, будем считать, что $wY=(\tau\lambda\mu)^{++}$, а U, V, W и F выбраны как выше. Представим Y как предел такого непрерывного спектра $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha<\beta<\omega((\tau\lambda\mu)^{++})\}$, что $wY_\alpha\leqq(\tau\lambda\mu)^+$ (такой спектр существует в силу результатов Щепина [9]). Из непрерывности функтора exp (см. [3]) следует, что $\exp Y$ является пределом непрерывного спектра $\{Z_\alpha=\exp Y_\alpha, p_\alpha^\beta=\exp\pi_\alpha^\beta; \alpha<\beta<\omega((\tau\lambda\mu)^{++})\}$. Имея в виду лемму 10, легко доказывается, что существует $\alpha_0<\omega((\tau\lambda\mu)^{++})$, для которого $\pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}([V])\subset U$ и $c(\pi_{\alpha_0}(F))\geqq(\tau\lambda\mu)^+$. Положим $z_{\alpha_0}=\widehat{\pi_{\alpha_0}(F)}\in Z_{\alpha_0}$. По лемме 7, существуют $\alpha>\alpha_0$, отображение φ из решетки и точки $x\in X_0$, $z_\alpha\in Z_\alpha$, такие, что $p_{\alpha_0}^\alpha(z_\alpha)=z_{\alpha_0}$ и $p_\alpha^{-1}p_\alpha(z_\alpha)=f(\varphi^{-1}\varphi(x))$.

Пусть $z_\alpha=\widehat{P}$, где P — замкнутое подмножество Y_α. Так как $p_{\alpha_0}^\alpha(z_\alpha)=z_{\alpha_0}$, то $\pi_{\alpha_0}^\alpha(P)=\pi_{\alpha_0}(F)$, т. е. $c(P)\geqq c(\pi_{\alpha_0}(F))\geqq(\tau\lambda\mu)^+$. Рассмотрим отображение $h=\pi_\alpha/[U]:[U]\to\pi_\alpha[U]$. Очевидно, что $\pi_\alpha^{-1}(P)\subset\pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}(F)\subset U$ и отсюда следует, что $(\exp h)^{-1}(\widehat{P})=(\exp\pi_\alpha)^{-1}(\widehat{P})=p_\alpha^{-1}(z_\alpha)$. Если $y\in[U]$, то $\pi w(h[U])\leqq wY_\alpha\leqq(\tau\lambda\mu)^+<\pi\chi(y, Y)=\pi\chi(y, [U])=(\tau\lambda\mu)^{++}$. Следовательно, бикомпакты $[U]$, $\pi_\alpha[U]$ и отображение h удовлетворяют условиям леммы 11, из которой получаем $c(p_\alpha^{-1}(z_\alpha))\geqq(\tau\lambda\mu)^+$. С другой стороны, $c(p_\alpha^{-1}(z_\alpha))\leqq c(\varphi^{-1}\varphi(x))\leqq\mu$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение 3 [7]. *Будем говорить, что бикомпакт X обладает свойством $\overline{\mathrm{LC}}$, если в X существует бесконечная дизъюнктная система открыто-замкнутых множеств.*

Лемма 14 [7]. *Пусть $f: X\to Y$ — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Пусть F — замкнутое подмножество Y, которое обладает свойством $\overline{\mathrm{LC}}$ и $\{H_n\}_{n=1}^\infty$ — бесконечная дизъюнктная система открыто-замкнутых в F множеств. Пусть в X существуют замкнутое множество Z, такое, что $f(Z)=Y$, и точка $x_0\in([\bigcup f^{-1}H_n]\setminus\bigcup f^{-1}H)\setminus Z$. Тогда $(\exp f)^{-1}(\widehat{F})$ не локально-связно.*

Определение 4 [9]. *Отображение $f: X\to Y$ топологического пространства X на Y называется мягким, если каковы бы ни были паракомпакт Z, его замкнутое подпространство A и отображения $g: Z\to Y$, $s: A\to X$, такие, что $f\circ s=g/A$, всегда существует отображение $\bar{s}: Z\to X$, для которого $f\circ\bar{s}=g$ и $\bar{s}/A=s$.*

Лемма 15 [10]. *Каждый* ANR *бикомпакт имеет решетку из мягких отображений.*

Лемма 16 [4]. *Следующие условия эквивалентные для полного метрического пространства X:*

а) *X локально-связно,*

б) Comp X *является* ANR *в классе метрических пространств,*

в) Comp X *локально-связно.*

Здесь через Comp X обозначается множество всех компактных подмножеств X в топологии Виеториса.

Теорема 4. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений со свойством:* $\varphi^{-1}\varphi(x)$ *локально-связно для всех* $x \in X$ *и для всех* φ *из решетки. Пусть* X_0 — *замкнутое* G_λ-*подмножество* X *и* $f: X_0 \to \exp Y$ — *непрерывное отображение* «на», *где* Y — *бикомпакт. Тогда* $wY \leqq \lambda\tau$.

Доказательство. Допустим, что $wY \geqq (\tau\lambda)^+$. В силу леммы 9, существует открытое множество $W \subset Y$, что $\pi\chi(y, Y) \geqq (\tau\lambda)^+$ для всех $y \in W$. Пусть U — открытое в Y, такое, что $[U] \subset W$. Тогда $\pi\chi(y, [U]) = \pi\chi(y, Y) \geqq (\tau\lambda)^+$ для всех $y \in [U]$, т. е. $\pi\chi([U]) \geqq (\tau\lambda)^+$. По лемме 12, существует замкнутое подмножество $F \subset [U]$, что $c(F) \geqq (\tau\lambda)^+$, а по лемме 13 — непрепрывное отображение бикомпакта Y на бикомпакт веса $(\tau\lambda)^+$. Этим мы показали, что предположение $wY = (\tau\lambda)^+$ не нарушает общность. Всюду далее мы будем считать, что $wY = (\tau\lambda)^+$, а U, W — выбраны как выше.

Пусть Y — предел непрерывного спектра $\{Y_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha < \beta < \omega((\tau\lambda)^+)\}$, где $wY_\alpha \leqq \tau\lambda$ и $\exp Y = \underleftarrow{\lim}\{Z_\alpha = \exp Y_\alpha, p_\alpha^\beta = \exp \pi_\beta^\alpha; \alpha < \beta < \omega((\tau\lambda)^+)\}$. Так как $|[U]| \geqq \aleph_0$ (иначе $\pi\chi(y, Y) = \pi\chi(y, [U]) < \aleph_0$, для всех $y \in [U]$) и в силу леммы 10, существует $\alpha_0 < \omega(\tau\lambda)^+$), такое, что $\pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}[U] \subset W$ и $|\pi_{\alpha_0}[U]| \geqq \aleph_0$. В множестве $\pi_{\alpha_0}[U]$ выбираем счетное дискретное множество $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $F = [\{p_n\}]_{n=1}^\infty$ и $z_{\alpha_0} = \widehat{F} \in Z_{\alpha_0}$. В силу леммы 7, существуют $\alpha > \alpha_0$, отображение φ из решетки, точки $x \in X_0$ и $z_\alpha \in Z_\alpha$, такие, что:

1) $(\exp \pi_{\alpha_0}^\alpha)(z_\alpha) = p_{\alpha_0}^\alpha(z_\alpha) = z_{\alpha_0}$,

2) $f(\varphi^{-1}\varphi(x)) = p_\alpha^{-1}(z_\alpha) = (\exp \pi_\alpha)^{-1}(z_\alpha)$.

Пусть z_α определяется замкнутым множеством $H \subset Y_\alpha$. Из 1) следует, что $\pi_{\alpha_0}^\alpha(H) = F$, и поэтому множества $(\pi_{\alpha_0}^\alpha/H)^{-1}(p_n) = H_n$ являются открыто-замкнутыми в H, $H_0 = (\pi_{\alpha_0}^\alpha/H)^{-1}(F \setminus \{p_n\}_{n=1}^\infty)$ замкнуто в H и $H = \bigcup_{n=0}^\infty H_n$, причем $H_n \cap H_m = \varnothing$ при $n \neq m$. Тогда $Q = \pi_\alpha^{-1}(H) = \bigcup_{n=0}^\infty \pi_\alpha^{-1}(H_n) = \bigcup_{n=0}^\infty Q_n$. Очевидно, что $Q_0 \cap [\bigcup_{n=1}^\infty Q_n] \neq \varnothing$ и $Q \subset \pi_\alpha^{-1}(H) \subset \pi_{\alpha_0}^{-1}(F) \subset \pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}[U] \subset W$.

Пусть $x_0 \in Q_0 \cap [\bigcup_{n=1}^\infty Q_n]$. Так как $x_0 \in W$, то $\pi\chi(x_0, Y) = (\tau\lambda)^+$. Если допустим, что для каждой окрестности $V(x_0)$ имеем $\pi_\alpha^\#(V(x_0)) = \{y \in Y_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(y) \subset V(x_0)\} \neq \varnothing$, то $\pi\chi(x_0, Y) \leqq \pi w Y_\alpha \leqq \tau\lambda$, а это противоречит тому, что $\pi\chi(x_0, Y) = (\tau\lambda)^+$. Следовательно, существует окрестность $V(x_0)$, такая, что $\pi_\alpha^\#(V(x_0)) = \varnothing$, т. е. $\pi_\alpha(Y \setminus V(x_0)) = Y_\alpha$. Положим $Z = Y \setminus V(x_0)$. Так как $x_0 \in ([\bigcup_{n=1}^\infty \pi_\alpha^{-1} H_n] \setminus \bigcup_{n=1}^\infty \pi_\alpha^{-1} H_n) \setminus Z$, по лемме 14 получаем, что $(\exp \pi_\alpha)^{-1}(\widehat{H}) = p_\alpha^{-1}(z_\alpha)$ не локально-связно. Но $p_\alpha^{-1}(z_\alpha) = f(\varphi^{-1}\varphi(x))$ и из локальной связности множества $\varphi^{-1}\varphi(x)$ следует, что $p_\alpha^{-1}(z_\alpha)$ тоже локально-связно. Полученное противоречие доказывает теорему.

Щепин [9] показал, что, если $f: X \to Y$ — мягкое отображение бикомпактов, то f открыто, а $f^{-1}f(x) \in \mathrm{AR}$ и тем более локально-связно для всех $x \in X$. Из этого замечания, теоремы 4 и леммы 15 получается

Следствие 3. *Если X — бикомпакт и* $\exp X$ *является непрерывным образом замкнутого* G_τ-*подмножества некоторого бикомпактного* ANR, *то* $wX \leqq \tau$.

Следствие 4. *Если X — бикомпакт, то* $\exp X$ *есть непрерывный образ бикомпактного* ANR *тогда и только тогда, когда X — локально-связный компакт.*

Следствие 4 получается при помощи следствия 3 и леммы 16.

Лемма 17. *Пусть X — вполне регулярное пространство и $n>2$. Если характер каждого канонически замкнутого подмножества $\exp_n X$ не превосходит τ, то $\chi(x, X)\leq\tau$ для любой точки $x\in X$.*

В [11] рассмотрен случай, когда $\tau=\aleph_0$. В общем случае доказательство то же самое.

Лемма 18. *Пусть f — непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Если $y_1, \ldots, y_n$ — n попарно различных точек из Y и $b=\{\widehat{y_1, \ldots, y_n}\}\in\exp_n Y$, то множество $(\exp_n f)^{-1}(b)$ гомеоморфно множеству $\Pi\{f^{-1}(y_i): i=1, \ldots, n\}$.*

Доказательство. Так как $f^{-1}(y_i)\cap f^{-1}(y_j)=\emptyset$ для $i\neq j$, то $(\exp_n f)^{-1}(b)=\{\{\widehat{x_1, \ldots, x_n}\}\in\exp_n X: x_i\in f^{-1}(y_i)\}$. Полагая $\varphi((x_1, \ldots, x_n))=\{\widehat{x_1, \ldots, x_n}\}$ для всех $(x_1, \ldots, x_n)\in\Pi\{f^{-1}(y_i): i=1, \ldots, n\}$, легко получим, что отображение $\varphi: \Pi\{f^{-1}(y_i): i=1, \ldots, n\}\to(\exp_n f)^{-1}(b)$ является гомеоморфизмом.

Теорема 5. *Пусть X — бикомпакт и $n>2$. Если $\exp_n X$ является непрерывным, открытым образом замкнутого G_λ-подмножества некоторого бикомпакта, имеющего τ-решетку из открытых отображений, то вес пространства X не превосходит $\tau\lambda$.*

Доказательство. При помощи теоремы 1 легко доказывается, что каждое канонически замкнутое подмножество пространства $\exp_n X$ будет $G_{\tau\lambda}$-подмножеством. Тогда из леммы 17 следует, что $\pi\chi(x, X)\leq\tau\lambda$ для всех $x\in X$, а из замечания 4 — что $\pi\chi(y, \exp_n X)\leq\tau\lambda$ для всех $y\in\exp_n X$. В силу теоремы 2 $w(\exp_n X)\leq\tau\lambda$ и, так как $wX=w(\exp_n X)$, то $wX\leq\tau\lambda$.

Из теоремы 5 и результатов Щепина [9] получается

Следствие 5. *Если X — бикомпакт и $n>2$, то $\exp_n X$ будет непрерывным, открытым образом некоторого бикомпакта, имеющего решетку из открытых отображений, только тогда, когда X метризуем.*

Отметим, что класс бикомпактов, имеющих решетку из открытых отображений, содержит все $\varkappa$-метризуемые бикомпакты, как и все абсолютные окрестностные ретракты.

Лемма 19 [10]. *Если $f: I^\tau\to X$ — непрерывное отображение тихоновского куба I^τ регулярного несчетного веса τ на бикомпакт X веса τ, то существует такое замкнутое подмножество $F\subset I^\tau$, гомеоморфное I^τ, что ограничение f на F является вложением.*

Лемма 20. *Пусть бикомпакт X имеет τ-решетку из открытых отображений и F — замкнутое G_λ-подмножество X. Если бикомпакт Y является непрерывным образом множества F и $\lambda\tau<wY$ — несчетный регулярный кардинал, то существует открытое множество $U\subset Y$, такое, что $\pi\chi(y, Y)=wY$ для всех $y\in U$.*

Доказательство. Пусть $M=\{y\in Y: \pi\chi(y, Y)<wY\}$. В силу замечания 2 имеем, что $w[M]<wY$ и тогда $U=Y\setminus[M]$ искомое.

Леммы 21 [10]. *Если X — бикомпакт, то* Con $X\in$ AR *тогда и только тогда, когда* $X\in$ ANR.

Здесь через Con X обозначается конус данного пространства X.

Лемма 22. *Пусть X — бикомпакт и F — замкнутое подмножество* Con$X$, *такое, что $F\overset{\text{top}}{=}I^\tau$ где τ — несчетный регулярный кардинал. Тогда существует такое замкнутое подмножество $H\subset X$, что $H\overset{\text{top}}{=}I^\tau$.*

Определение 5. *Пусть X — бикомпакт и Ψ — решетка для X. Будем говорить, что решетка Ψ обладает свойством* $(*)$, *если* $\varphi^{-1}\varphi(x) \in \mathrm{ANR}$ *для всех* $x \in X$ *и для всех* $\varphi \in \Psi$.

Теорема 6. *Пусть X — бикомпакт и $wX=\tau$ — несчетный регулярный кардинал. Пусть* $\exp_n X$ *является непрерывным образом замкнутого* G_λ*-подмножества F бикомпакта Y, имеющего μ-решетку из открытых отображений со свойством* $(*)$, *где* $\lambda\mu<\tau$. *Тогда множество* $M=\{x \in X: \chi(x, X)=\tau\}$ *имеет непустую внутренность, и для любой точки* $x \in \langle M\rangle$ *и любой ее окрестности Ox существует замкнутое множество Fx, такое, что* $Fx \subset Ox$ *и* $Fx \overset{\text{top}}{=} I^\tau$.

Доказательство. Пусть $f: F \to \exp_n X$ — непрерывное отображение «на». Согласно лемме 20, существует точка $z_0 \in \exp_n X$, такая, что $\pi\chi(z_0, \exp_n X)=\tau$. Пусть $z_0=\{x_0^1, \widehat{\ldots}, x_0^k\}$, где $x_0^i \neq x_0^j$, $x_0^i \in X$. В силу замечания 4, $\pi\chi(x_0^{i_0}, X)=\tau$ для некоторого $i_0 \leq k$.

Если успеем показать, что множество $M'\{x \in X: \pi\chi(x, X)=\tau\}$ открыто в X, отсюда бы следовало, что $\langle M\rangle \neq \varnothing$ (так как $x_0^{i_0} \in M'$). Пусть $x_0 \in M'$, т. е. $\pi\chi(x_0, X)=\tau$. Допустим, что для каждой окрестности Ox_0 точки x_0 существует точка $x \in Ox_0$, для которой $\pi\chi(x, X)<\tau$, т. е. $x_0 \in [X \setminus M']_X$. Имея в виду лемму 8 и замечание 2, получаем, что $w[\exp_n(X \setminus M']_{\exp_n X} < \tau$. Однако $\exp_n [X \setminus M']_X \subset [\exp_n(X \setminus M')_{\exp_n X}$, откуда $w(\exp_n [X \setminus M']_X) < \tau$, т. е. $w[X \setminus M']_X<\tau$. Пусть $A \subset X \setminus M'$, такое, что $[A]_X=[X \setminus M']_X$ и $|A|<\tau$. Для любой точки $x \in A$ через $\mathscr{B}x$ обозначаем локальную π-базу точки x, мощности $\tau_x<\tau$, а через $\mathscr{B} - \bigcup\{\mathscr{B}x: x \in A\}$. Если Ox_0 — произвольная окрестность точки x_0 в X, то $x \in Ox_0$ для некоторой точки $x \in A$ (так как $x_0 \in [X \setminus M']=[A]$) и, следовательно, $V \subset Ox_0$ для некоторого $V \in \mathscr{B}x$. Этим мы показали, что $\mathscr{B}$ является локальной π-базой точки x_0, что вместе с $|\mathscr{B}|<\tau$ противоречит тому, что $\pi\chi(x_0, X)=\tau$. Следовательно, M' открыто и тем более $\langle M\rangle \neq \varnothing$. Представим X как предел непрерывного спектра $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta; \alpha<\beta<\omega(\tau)\}$, где $wX_\alpha<\tau$, и тогда $\exp_n X=\varprojlim\{\exp_n X_\alpha=Z_\alpha, p_\beta^\alpha=\exp_n \pi_\alpha^\beta, \alpha<\beta<\omega(\tau)\}$.

Пусть $x_0 \in \langle M\rangle$ и Ox_0 — окрестность точки x_0. Не нарушая общности, можно считать, что $Ox_0 \subset M$ и $Ox_0=\pi_{\alpha_0}^{-1}\pi_{\alpha_0}(Ox_0)$ для некоторого α_0. Пусть $x_{\alpha_0}^1=\pi_{\alpha_0}(x_0), \ldots, x_{\alpha_0}^n$ — попарно различные точки пространства X_{α_0} и $z_{\alpha_0}=\{x_{\alpha_0}^1, \widehat{\ldots}, x_{\alpha_0}^n\} \in Z_{\alpha_0}$. В силу леммы 7, существуют порядковое число $\alpha>\alpha_0$, точки $z_\alpha \in Z_\alpha$, $y \in F$ и отображение φ из решетки, такие, что:

1) $f(\varphi^{-1}\varphi(y))=p_\alpha^{-1}(z_\alpha)$,

2) $p_{\alpha_0}^\alpha(z_\alpha)=z_{\alpha_0}$.

Так как $p_{\alpha_0}^\alpha(z_\alpha)=z_{\alpha_0}$ и $x_{\alpha_0}^i \neq x_{\alpha_0}^j$, то $z_\alpha=\{x_\alpha^1, \widehat{\ldots}, x_\alpha^n\}$ для некоторых $x_\alpha^i \in (\pi_{\alpha_0}^\alpha)^{-1}(x_{\alpha_0}^i)$. Очевидно, что $p_\alpha^{-1}(z_\alpha) \overset{\text{top}}{=} \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1) \times \cdots \times \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^n)$ и согласно 1), $p_\alpha^{-1}(z_\alpha)$, а, следовательно, и $\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1)$ является образом бикомпактного ANR.

Из $\tau=\chi(x, X) \leqq w(\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1)) \cdot \chi(\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1), X)$, где $x \in \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1) \subset \pi_{\alpha_0}^{-1}(x_{\alpha_0}^1) \subset Ox_0 \subset M$, и из $\chi(\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1), X)<\tau$ следует, что $w\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1)=\tau$. Тогда по лемме 21, $\mathrm{Con}\,\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1)$ является непрерывным образом бикомпактного AR, а, следовательно, образом $I^{\tau'}$ для некоторого $\tau' \geq \tau$. В силу результатов Engelki- Pelczynski [12], следует, что $\mathrm{Con}\,\pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1)$ является непрерывным обра[зом] пространства I^τ, а в силу леммы 19 и леммы 22, существует замкнутое подмножество $Fx_0 \subset \pi_\alpha^{-1}(x_\alpha^1) \subset Ox_0$, такое, что $Fx_0 \overset{\mathrm{top}}{=} I^\tau$. Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть X — бикомпакт и $wX = \tau$ — несчетный регулярный кардинал. Пусть X является непрерывным образом замкнутого G_λ-подмножества F бикомпакта Y, имеющего μ-решетку из открытых отображений со свойством $(*)$, где $\lambda\mu < \tau$. Тогда множество $M = \{x \in X: \chi(x, X) = \tau\}$ имеет непустую внутренность, и для любой точки $x \in \langle M \rangle$ и любой ее окрестности Ox существует замкнутое множество Fx, такое, что $F_x \subset Ox$ и $F_x \overset{\mathrm{top}}{=} I^\tau$.*

Доказательство. M имеет непустую внутренность по лемме 19. Дальше доказательство проводится так же, как в теореме 6.

Автор выражает благодарность Г. Скордеву за постоянное внимание к его работе и за ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. С. Александров, Б. А. Пасынков. Введение в теорию размерности. Москва, 1973.
2. В. М. Вылов. О весе биокомпактов с решетками из открытых отображений. *Доклады БАН*, **32**, *1979*.
3. С. Сирота. О спектральном представлений пространств замкнутых подмножеств бикомпактов. *Доклады АН СССР*, **181**, 1968, 1069—1072.
4. У. Ташметов. О связности и локальной связности некоторых гиперпространств. *Сиб. мат. ж.* **15**, 1974, 1115—1130.
5. Б. Шапировский. О плотности топологических пространств. *Доклады АН СССР*. **206**, 1972, 559—562.
6. Б. Шапировский. О π-характере и π-весе в бикомпактах. *Доклады АН СССР*, **223**, 1975, 799—802.
7. Л. Шапиро. О пространствах замкнутых подмножеств бикомпактов. *Доклды АН СССР*, **231**, 1976, 295 — 298.
8. Л. Шапиро. Пространство замкнутых подмножеств $\mathscr{D}\aleph_2$ не является диадическим бикомпактом. *Доклады АН СССF*, **228**, 1976, 1302—1305.
9. Е. Щепип. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров. *Успехи мат. наук*, **31**, 1976, 191—226.
10. Е. Щепин. Конечномерный бикомпактный абсолютный окрестностный ретракт метризуемый. *Доклады АН СССР*, **233**, 1977, 304—307.
11. Е. Щепин. О $\varkappa$-метризуемых пространствах. *Известия АН СССР*, **43**, 1979, 442—478.
12. R. Engelking, A. Pelczynski. Remarks on dyadic spaces. *Colloq. Math.*, 11, 1963, 55—63.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 29. 9. 1979